



ESTÁTICA

1^a ed.





UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL



AUTORIA

MARCOS SOUZA LENZI

COLABORAÇÃO DE DESENVOLVIMENTO

TUTOR: CLÁUDIO CÉSAR ZIMMERMANN
MEMBROS DO PET/ECV: ANTHONY ALIARD
BRUNO EDUARDO BESTETTI
CAMILA MATOS DE AQUINO
CARLOS EDUARDO FIGUR
DAVI WERNER BENVENUTI
DANIEL TAVARES DOS ANJOS
GIORGIA LUCCHETA PEZZI
GIULIA PIMENTEL CIA KOIKE
GUILHERME ESTACIA AMBROS
HENRIQUE JUAREZ ZANDONAI
HENRIQUE SIMIANO
IAN LOSS
JOÃO VICTOR HERNANDES VIANNA LEMOS NAPPI
JULIA RAITATCHESCK FIATES
JÚLIA VALENTINA BONELLI
JULIANO PASA CAMPOS
LETICIA DA SILVA JUCOSKI
LUIZ ROSSO LLANTADA
RAFAELA JEFFE MONDADORI
RAUL MUNHOZ PONCE
TAMIRES DOS SANTOS
VITOR SCHWEITZER THIESEN

Julho, 2022

SUMÁRIO

1. Introdução.....	8
Corpos Rígidos	8
Corpos Deformáveis	8
1.1 Mecânica Newtoniana	9
Partícula	9
Corpo Rígido	9
Prefixos	10
Precisão numérica	10
Exemplos	10
1.2 Vetores de Força/partículas	11
Produto escalar	11
Adição de vetores	12
Lei do Paralelogramo.....	12
Regra do Triângulo	12
Soma de 3 ou mais vetores:.....	12
Propriedade Associativa	13
Intensidade e direção da resultante	13
Lei dos cossenos	13
Lei dos senos.....	13
Exemplo 1.1	13
Exemplo 1.2	15
Exemplo 1.3.....	16
1.3 Sistema de forças coplanares.....	17
Exemplo 1.4.....	18
1.4 Vetores no espaço.....	20
Exemplo 1.5	21
1.5 Vetor posição.....	22
Vetor força orientado ao longo de uma reta.....	23
Exemplo 1.6	23
1.6 Produto escalar	25
Exemplo 1.7	26
Exemplo 1.8.....	27
1.7 Equilíbrio de partícula.....	28
Exemplo 1.9	29
Exemplo 1.10	30
2 Corpos Rígidos.....	33

Forças Internas e Externas	33
Força Externa	33
Força Interna	33
Princípio da Transmissibilidade	34
2.1 Produto Vetorial	34
Leis de Operação	35
Produto vetorial em termos dos vetores cartesianos unitários (\mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k})	35
2.2 Momento de uma força em relação a um ponto	37
Momento Resultante de um sistema de forças	37
Exemplo 2.1	38
Exemplo 2.2.....	38
2.3 Princípio dos Momentos (Teorema de Varignon)	40
Exemplo 2.3.....	41
2.4 Momento de uma força em relação a um eixo	42
Exemplo 2.4.....	43
2.5 Momento de um Binário.....	45
Binário equivalente.....	46
Representação de binários	47
Exemplo 2.5.....	48
Exemplo 2.6.....	48
2.6 Redução de um sistema de forças e um binário.....	50
Exemplo 2.7.....	51
Exemplo 2.8.....	52
Exemplo 2.9.....	53
3. Equilíbrio de Corpos Rígidos	55
3.1 Reações nos Vínculos em 2D	56
Rolete, superfície lisa ou pino deslizando	56
Articulação, rótula ou pino.....	57
Engastamento ou apoio fixo (rebitada, parafusada, soldada, etc).....	58
Membro fixo deslizando sobre haste lisa.....	59
Cabos ou hastes	59
3.2 Tipos de estrutura	60
Isoestática	60
Hipoestática.....	60
Hiperestática.....	61
Exemplo 3.1.....	61
Exemplo 3.2.....	62
Exemplo 3.3.....	63
Exemplo 3.4.....	64

3.3 Membros de duas forças.....	65
Exemplo 3.5	65
Exemplo 3.6	68
Exemplo 3.7	70
Exemplo 3.8	71
4 Análise de estruturas.....	75
4.1 Análise de Trelças Estaticamente	75
Determinadas	75
Trelças de cobertura/Telhado.....	75
Trelças de Ponte	76
Análise de Trelças.....	77
Estaticidade de Trelças.....	78
4.2 Método dos nós	79
Casos especiais.....	79
Exemplo 4.1	80
Exemplo 4.2.....	81
Exemplo 4.3.....	82
4.3 Método das seções	84
Exemplo 4.4.....	85
Exemplo 4.5.....	86
Exemplo 4.6	88
4.4 Estruturas e Máquinas	89
Exemplo 4.7	90
Exemplo 4.8	Erro! Indicador não definido.
Exemplo 4.9	Erro! Indicador não definido.
5 Diagrama de forças axiais, cortante e de momentos (Hibbeler, Arcanjo).....	95
5.1 Método das seções ou método direto	96
Exemplo 5.1	98
Exemplo 5.2	100
Exemplo 5.3	102
5.2 Método gráfico ou do somatório.....	104
Exemplo 5.4	107
Exemplo 5.5.....	110
Exemplo 5.6.....	113
Exemplo 5.7.....	115
6 Forças distribuídas	120
Distribuição de linha.....	120
Distribuição de área	120
Distribuição de volume	120

6.1 Centro de Gravidade.....	121
6.2 Centróide de área	122
Centróide de Linha	122
Áreas compostas.....	123
Exemplo 6.1.....	123
Exemplo 6.2.....	123
Formas de superfície.....	124
Triângulo.....	124
Semicírculo	124
Quarto de círculo.....	124
Exemplo 6.3.....	125
6.3 Determinação de centróides por integração	126
Exemplo 6.4.....	127
Exemplo 6.5.....	128
Exemplo 6.6.....	130
6.4 Cargas distribuídas sobre vigas	131
Exemplo 6.7.....	132
Exemplo 6.8.....	134
Exemplo 6.9.....	135
7 Momentos de Inércia.....	137
7.1 Momentos de Inércia de Área.....	137
Exemplo 7.1.....	140
Exemplo 7.2.....	141
7.2 Teorema dos Eixos Paralelos (Teorema de Steiner).....	142
Exemplo 7.3.....	144
Exemplo 7.4.....	144
7.3 Momento polar de inércia	145
Eixo de transmissão	145
7.4 Raio de giração de uma área	146
Exemplo 7.5.....	148
Exemplo 7.6.....	150
Exemplo 7.7.....	153
7.5 Produto de inércia de área	154
Exemplo 7.8.....	158
Exemplo 7.9.....	160
Exemplo 7.10.....	161
7.6 Rotação de Eixos.....	162
Exemplo 7.11.....	166

1. Introdução

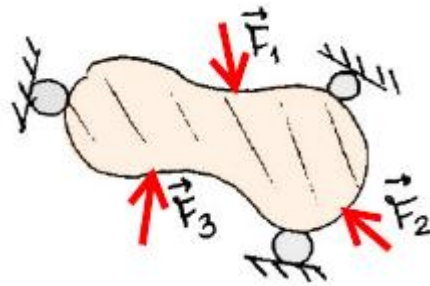
[Berr 4]

A mecânica pode ser dividida em três partes:

- Mecânica dos corpos rígidos
- Mecânica dos corpos deformáveis
- Mecânica dos fluidos (compressíveis e incompressíveis)

Corpos Rígidos

Corpos Inflexíveis e não deformáveis.



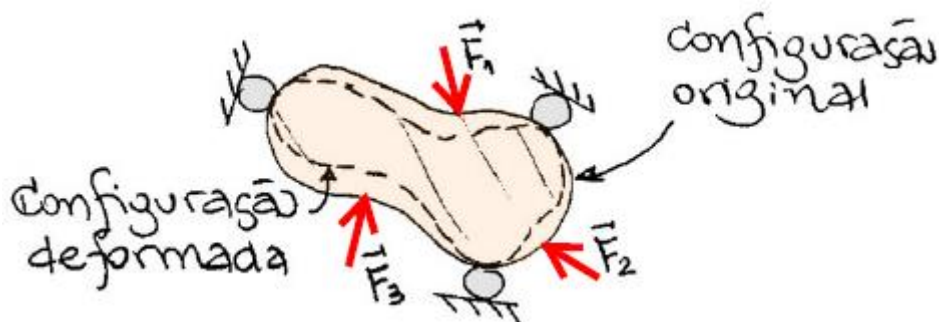
$$\begin{aligned} +\sum \vec{F} &= 0 \\ +\sum \vec{M} &= 0 \\ \text{Estática} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} +\sum \vec{F} &\neq 0 \\ +\sum \vec{M} &\neq 0 \\ \text{Dinâmica} \end{aligned}$$

No entanto, estruturas reais nunca são absolutamente rígidas. Estas deformações, contudo, geralmente são pequenas e não afetam as condições de equilíbrio ou de movimento.

Corpos Deformáveis

As deformações são importantes para o estudo da resistência da estrutura a falhas.



Na disciplina de Mecânica dos Sólidos, o comportamento mecânico de corpos estáticos com os conceitos de tensão e deformação possuem algumas aplicações, como cálculos envolvendo: estruturas de aço, estruturas de madeira, concreto e etc.

"A disciplina de Estática é base para todas as disciplinas de projeto!"

1.1 Mecânica Newtoniana

[Berr 4]

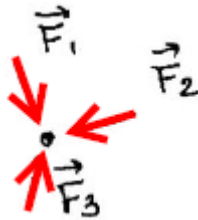
A Mecânica Newtoniana é a base das engenharias atuais. Baseada nos conceitos de:

- Espaço
- Tempo
- Massa
- Força

Estudaremos estes conceitos para as condições de repouso de partículas e de corpos rígidos.

Partícula

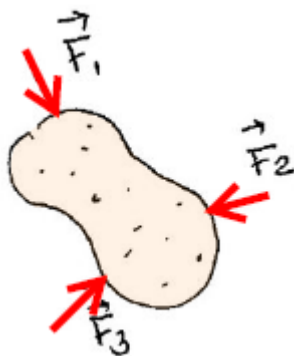
Quantidade de matéria muito pequena em um único ponto: idealização.



$$+\sum \vec{F} = \vec{0} \therefore \text{Sem rotação}$$

Corpo Rígido

Combinação de um grande número de partículas.



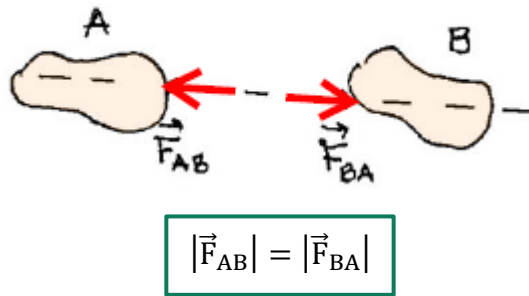
$$+\sum \vec{F} = \vec{0} \therefore \text{Sem translação}$$

$$+\sum \vec{M} = \vec{0} \therefore \text{Sem rotação}$$

O estudo da mecânica baseia-se nas Leis de Newton:

- **1ª Lei de Newton** (princípio da inércia): Se $+\sum \vec{F} = \vec{0}$ em uma partícula, tem-se repouso ou movimento retilíneo uniforme.
- **2ª Lei de Newton**: a aceleração é proporcional à magnitude de \vec{F}_r e ocorre na mesma direção.
 $\vec{F}_r = m \cdot \vec{a}$
- **3ª Lei de Newton** (ação e reação): as forças de ação e reação entre corpos em

contato, têm mesma magnitude, linha de ação e sentidos opostos.



Prefixos

Múltiplos e submúltiplos de unidades fundamentais do S.I podem ser obtidos pelo uso de prefixos.

- $10^{-3} = m$ (mili)
- $10^{-6} = \mu$ (micro)
- $10^{-9} = n$ (nano)
- $10^3 = k$ (quilo)
- $10^6 = M$ (mega)
- $10^9 = G$ (giga)

Precisão numérica

A precisão da solução de um problema depende de três itens:

- Precisão dos dados de entrada
- Precisão dos cálculos efetuados
- Número de Algarismos Significativos

Quanto aos números significativos:

$$|\vec{F}_1| = 1,1$$
$$|\vec{F}_2| = 1,431$$

- $|\vec{F}_1| + |\vec{F}_2| = 2,5$

Limitação do dado de entrada

- $|\vec{F}_1| = 30$ algarismos
- $|\vec{F}_2| = 30$ algarismos

Somando em uma calculadora com precisão de 8 algarismos significativos haverá uma limitação dos cálculos efetuados.

Exemplos

- 1) $0,00821 \rightarrow 8,21 \times 10^{-3}$ [3 algarismos significativos]
- 2) $234100 \rightarrow 2,341 \times 10^5$ [4 algarismos significativos]

Regra geral: utiliza-se, em engenharia, 3 algarismos significativos.

1.2 Vetores de Força/partículas

[Berr 16]

Vamos inicialmente estudar as forças agindo em partículas.

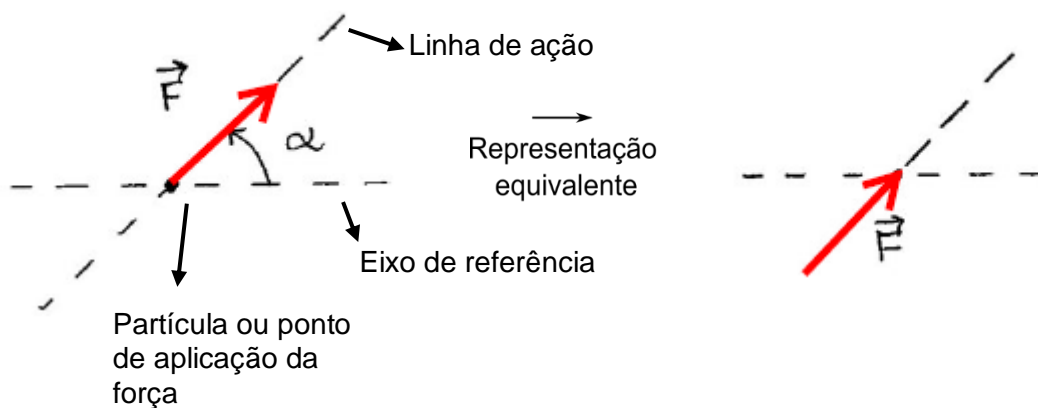
Uma força representa uma ação de um corpo sobre outro, e são caracterizadas

por:

- Magnitude, módulo ou intensidade
- Direção ou linha de ação
- Sentido

Entidades Vetoriais

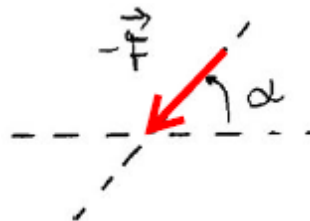
- Força
- Deslocamento
- Velocidade
- Aceleração



O comprimento do vetor representa a magnitude do vetor: $|\vec{F}| = F$.

E, por último, o sentido da força é representado pela cabeça da flecha.

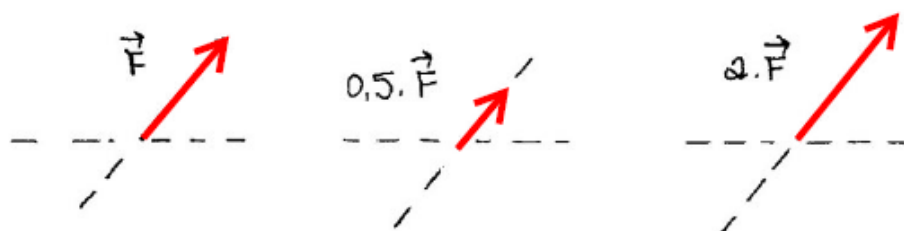
Um vetor negativo, $-\vec{F}$, apresenta o mesmo módulo e linha de ação, porém com sentido oposto.



Produto escalar

O produto escalar de uma quantidade escalar K por um vetor \vec{F} , amplifica ou contrai/reduz a intensidade do vetor:

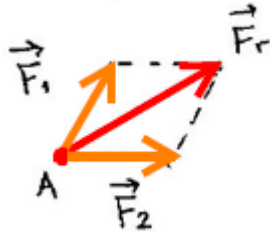
- Volume
- Massa
- Energia



Adição de vetores

[Berr 17]

Evidências experimentais mostram que dois vetores de força atuando na mesma partícula podem ser substituídos por um único vetor resultante que apresentará o mesmo efeito na partícula.



\vec{F}_r ocasiona os mesmos efeitos que soma $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$
$$\vec{F}_r = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Lei do Paralelogramo

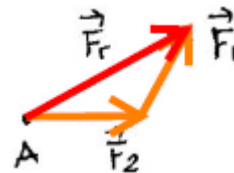
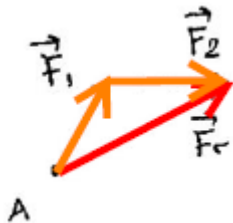
A força resultante pode ser obtida através da Lei do paralelogramo, onde a diagonal que passa pelo paralelogramo é o vetor resultante.

Uma vez que o paralelogramo construído com os vetores \vec{F}_1 e \vec{F}_2 não depende da ordem da seleção dos vetores, temos que a propriedade comutativa se verifica:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_2 + \vec{F}_1$$

Regra do Triângulo

Outra maneira de se realizar esta soma é através da Regra do Triângulo, em que os vetores a serem somados são dispostos/conectados no “término” de cada vetor:

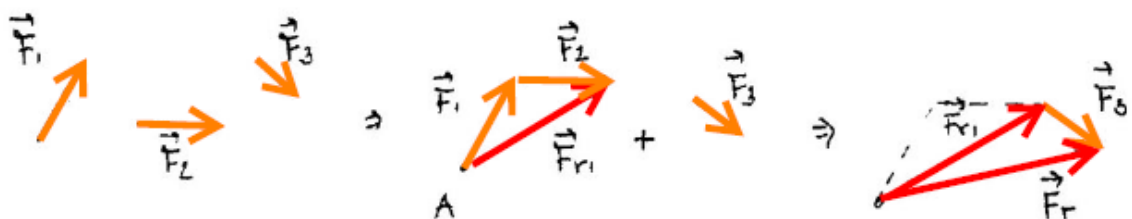


Soma de 3 ou mais vetores

[Berr 20]

A soma de \vec{F}_1 , \vec{F}_2 e \vec{F}_3 pode ser realizada somando-se 2 vetores, e, com a (\vec{F}_r), soma-se o último para se obter a \vec{F}_r final:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (\vec{F}_{r1}) + \vec{F}_3$$



Propriedade Associativa

Quando os vetores estão situados no plano, a adição pode ser feita de maneira gráfica mais facilmente. Com isso, podemos observar uma segunda propriedade da soma de vetores, que é a propriedade associativa (independe da sequência de vetores escolhidos).

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + (\vec{F}_2 + \vec{F}_3)$$

Intensidade e direção da resultante

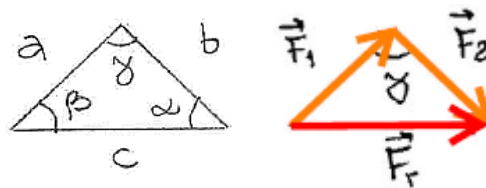
Podemos determinar o vetor resultante \vec{F}_R de uma soma de vetores de duas maneiras:

- Leis da trigonometria
- Decomposição de forças

Lei dos cossenos

Quando se conhece os módulos de 2 vetores e o ângulo formado entre eles, é possível determinar o módulo do vetor resultante:

$$C = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \times \cos(\gamma)}$$



Lei dos senos

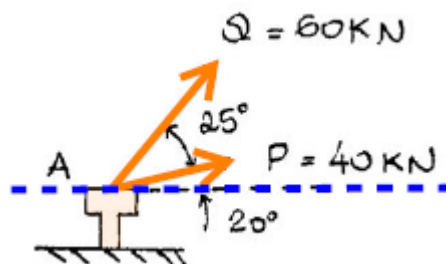
Quando se conhece os ângulos e apenas um módulo, podemos descobrir os demais módulos:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Exemplo 1.1

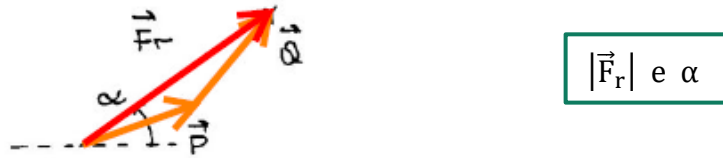
[Berr 9ª ed.
Sample problem 2.1]

Determine a resultante e a sua direção.

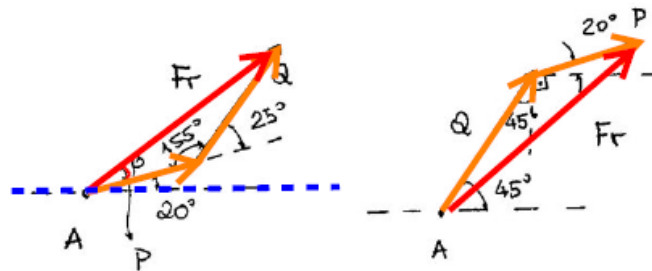


→ Solução gráfica:

Somar os dois vetores em escala e utilizar a régua e transferidor para obter o ângulo (com relação à referência) e o comprimento.



→ Solução trigonométrica:



Conhecemos os dois módulos e o ângulo entre eles:

→ Lei dos cossenos:

$$F_r = \sqrt{P^2 + Q^2 - 2PQ \times \cos(\gamma)} \therefore F_r = \sqrt{40^2 + 60^2 - 2 \times 40 \times 60 \times \cos(\gamma)}$$

$$F_r = 97,73 \text{ kN}$$

→ Lei dos senos:

$$\frac{F_r}{\sin(155^\circ)} = \frac{Q}{\sin(\beta)}$$

$$\beta = \sin^{-1} \times \left[\frac{60 \times \sin(155)}{97,73} \right] \therefore \beta = 15,04^\circ$$

Portanto, o ângulo α que \vec{F}_r forma com o eixo horizontal é:

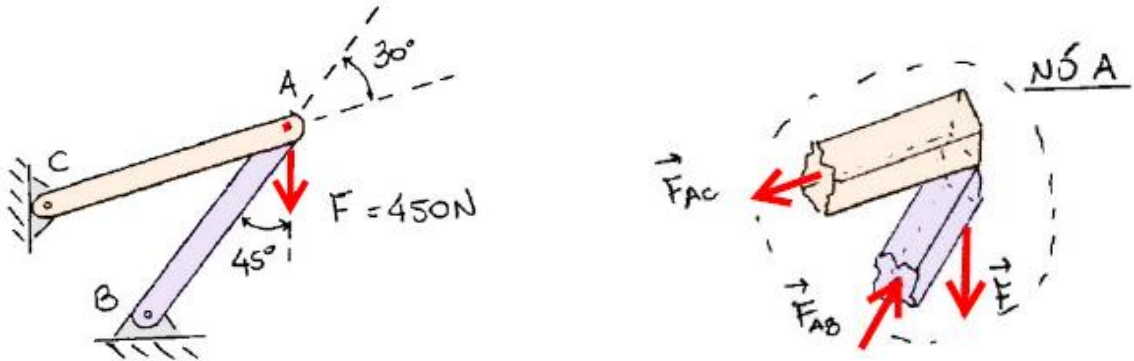
$$\alpha = 20^\circ + \beta \therefore \alpha = 20^\circ + 15,04^\circ$$

$$\alpha = 35,04^\circ$$

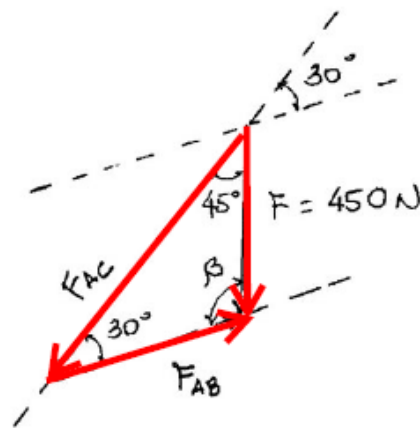
Exemplo 1.2

[F2 – 5 Hibbeler]
12ª ed.]

Decomponha a força \vec{F} na direção dos membros AB e AC:



→ \vec{F} é a única força aplicada, logo é a força resultante. Além disso, conhecemos os ângulos e apenas um módulo $F = 450\text{ N}$:



$$30 + 45 + \beta = 180 \therefore \beta = 105^\circ$$

→ Lei dos senos:

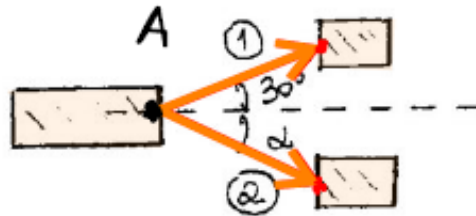
$$\frac{450}{\sin(30^\circ)} = \frac{F_{AC}}{\sin(\beta)} \therefore F_{AC} = 869,3\text{ N}$$

$$\frac{450}{\sin(30^\circ)} = \frac{F_{AB}}{\sin(45^\circ)} \therefore F_{AB} = 636,4\text{ N}$$

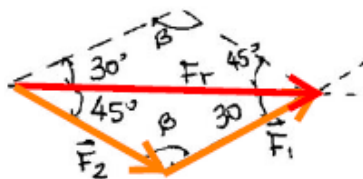
Exemplo 1.3

[Beer 9ª ed.
Sample prob. 2.2]

Se a resultante das forças é 5 kN e tem direção horizontal, determine (a) a força de tração em cada corda para $\alpha = 45^\circ$; (b) o valor de α para que a tração na corda 2 seja mínima.



→ A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°

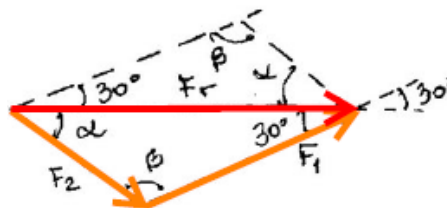


$$2\beta + 2 \times (75^\circ) = 360^\circ \therefore \beta = 105^\circ$$

Como conhecemos os ângulos:

$$\frac{5000}{\sin(105^\circ)} = \frac{F_1}{\sin(45^\circ)} = \frac{F_2}{\sin(30^\circ)} \therefore F_1 = 3660,3 \text{ N e } F_2 = 2588,2 \text{ N}$$

→ Devemos escrever a tração F_2 em termos de α :

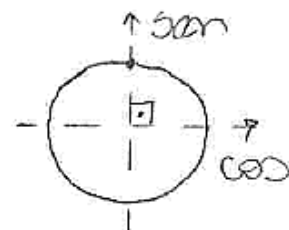


$$\alpha + \beta + 30^\circ = 180^\circ \therefore \beta = 150 - \alpha$$

$$\frac{5000}{\sin(150 - \alpha)} = \frac{F_2}{\sin(30^\circ)} \therefore F_2 = \frac{2500}{\sin(150 - \alpha)}$$

A tração será mínima quando o denominador for máximo:

$$150 - \alpha = 90^\circ \therefore \alpha = 60^\circ$$

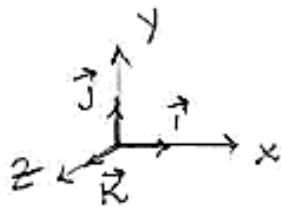
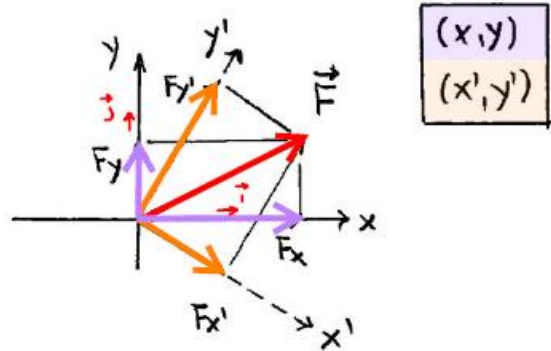


1.3 Sistema de forças coplanares

Quando é necessário obter a resultante de mais de duas forças é mais fácil determinar as componentes de cada vetor em um dado Sistema de coordenadas e depois somar as componentes em cada eixo.

Então, para cada vetor podemos decompor em relação à qualquer Sistema de coordenadas de eixos ortogonais (que formam 90° entre si) desde que saibamos os devidos ângulos.

Também é possível representar as componentes de um vetor em termos de vetores cartesianos unitários $[\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}]$, que são utilizados para designar as direções dos eixos (x, y, z).

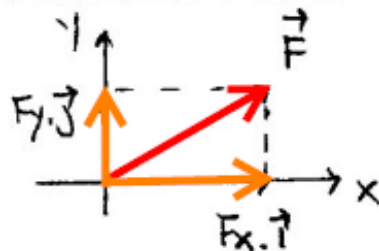


$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$$

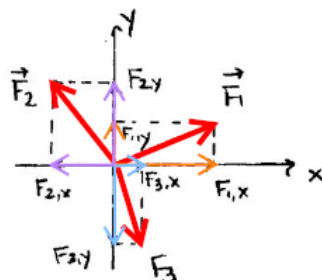
- Observação: Os vetores $[\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}]$ possuem modulo unitário, direção e sentido dos eixos designados.

No caso anterior, o vetor \vec{F} pode ser representado em termos dos vetores cartesianos unitários.

$$\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j}$$



Então, quando temos mais de 2 vetores num plano é aconselhável proceder desta maneira:



$$\vec{F}_r = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

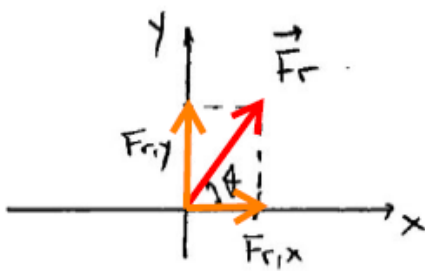
$$\vec{F}_r = (F_{1,x} \cdot \vec{i} + F_{1,y} \cdot \vec{j}) + (-F_{2,x} \cdot \vec{i} + F_{2,y} \cdot \vec{j}) + (F_{3,x} \cdot \vec{i} - F_{3,y} \cdot \vec{j})$$

$$\vec{F}_r = (F_{1,x} - F_{2,x} + F_{3,x}) \cdot \vec{i} + (F_{1,y} + F_{2,y} - F_{3,y}) \cdot \vec{j}$$

O módulo da força resultante é obtido por:

$$F_{r,x} = \sum F_x \rightarrow [F_{1,x} - F_{2,x} + F_{3,x}]$$

$$F_{r,y} = \sum F_y \rightarrow [F_{1,y} + F_{2,y} - F_{3,y}]$$



$$\vec{F}_r = (F_{r,x}) \cdot \vec{i} + (F_{r,y}) \cdot \vec{j}$$

E a intensidade ou módulo de \vec{F}_r é dado por

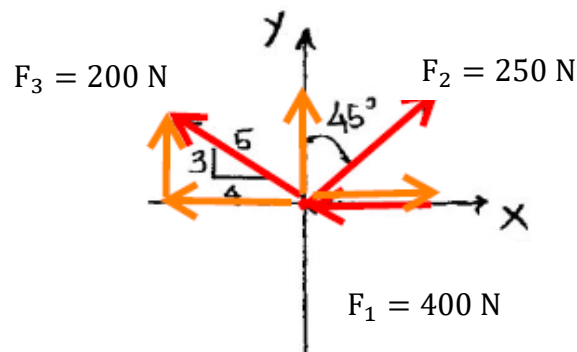
$$|\vec{F}_r| = F_r = \sqrt{F_{r,x}^2 + F_{r,y}^2} \text{ e a direção de } \vec{F}_r \text{ é}$$

$$\theta = \text{tg}^{-1} \left(\frac{F_{r,y}}{F_{r,x}} \right)$$

Exemplo 1.4

[Hibbeler 13ª ed.]
[Exemplo 2.7]

Determine a força resultante e a sua direção no sentido anti-horário a partir de X+.



→ Cálculo das componentes na direção X:

$$F_{r,x} = -400 + F_{2,x} - F_{3,x}$$

$$F_{r,x} = -400 + \text{sen}(45^\circ) \cdot 250 - \left(\frac{4}{5}\right) \cdot 200$$

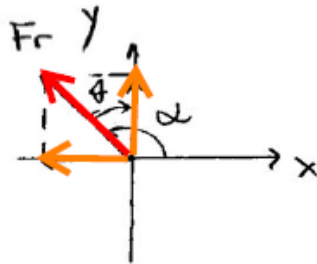
$$F_{r,x} = -382,2\text{N ou } F_{r,x} = 382,2\text{N} (\leftarrow)$$

→ Cálculo das componentes na direção Y:

$$F_{r,y} = F_{1,y} + F_{2,y} + F_{3,y}$$

$$F_{r,y} = 0 + \cos(45^\circ).250 + \left(\frac{3}{5}\right).200$$

$$F_{r,y} = 296\text{N} (\uparrow)$$



→ Cálculo do ângulo α :

$$F_r = \sqrt{(F_{r,x})^2 + (F_{r,y})^2}$$

$$\text{tg}(\theta) = \left(\frac{F_{r,x}}{F_{r,y}}\right)$$

$$\text{Logo, } \alpha = 90^\circ + \theta$$

$$F_r = \sqrt{(382,2)^2 + (296)^2}$$

$$\theta = \text{tg}^{-1}\left(\frac{F_{r,x}}{F_{r,y}}\right)$$

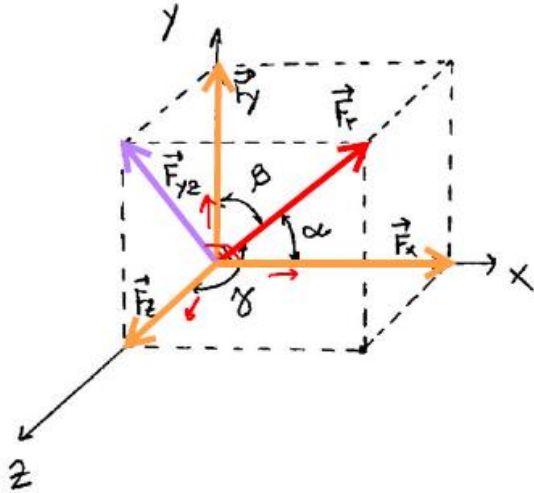
$$\alpha = 142^\circ$$

$$F_r = 485\text{N}$$

$$\theta = 52,2^\circ$$

1.4 Vetores no espaço

Em problemas tridimensionais, as operações podem ser simplificadas se considerarmos primeiro uma representação no plano cartesiano.



$$\vec{F}_r = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z$$

$$\vec{F}_{yz} = \vec{F}_y + \vec{F}_z$$

$$F_{yz} = \sqrt{(F_y)^2 + (F_z)^2}$$

Podemos também representar em termos dos vetores cartesianos unitários $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

$$\vec{F}_r = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

Notem que o vetor \vec{F}_{yz} é perpendicular à \vec{F}_x . Logo,

$$\vec{F}_r = \vec{F}_{yz} + \vec{F}_x$$

$$F_r = \sqrt{(F_x)^2 + \left(\sqrt{(F_y)^2 + (F_z)^2} \right)^2}$$

$$F_r = \sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2 + (F_z)^2}$$

Os ângulos α, β e γ são os ângulos entre os eixos coordenados e o vetor resultante. Eles são chamados de ângulos diretores de \vec{F}_r , enquanto seus cossenos são chamados de cossenos diretores do vetor \vec{F}_r .

$$\cos(\alpha) = \frac{F_x}{F_r}$$

$$\cos(\beta) = \frac{F_y}{F_r}$$

$$\cos(\gamma) = \frac{F_z}{F_r}$$

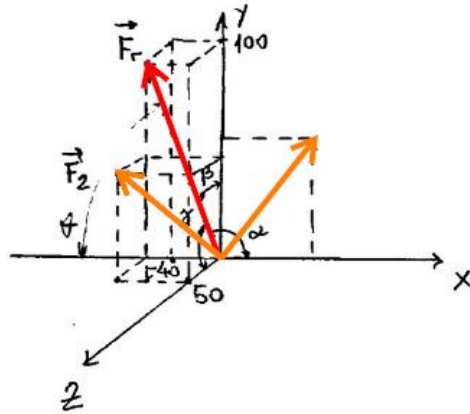
O vetor resultante pode ser expresso em termos dos cossenos diretores:

$$\vec{F}_r = (F \cos \alpha) \vec{i} + (F \cos \beta) \vec{j} + (F \cos \gamma) \vec{k}$$

Exemplo 1.5

[Hibbeler 13ª ed.]
[Exemplo 2.9]

Determine a intensidade e os ângulos diretores coordenados da força resultante.



$$\vec{F}_1 = [60\vec{i} + 80\vec{j}] \text{ N}$$

$$\vec{F}_2 = [-100\vec{i} + 100\vec{j} + 50\vec{k}] \text{ N}$$

→ Cálculo da Força Resultante:

$$\begin{aligned}\vec{F}_r &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \\ \vec{F}_r &= (60\vec{i} + 80\vec{j}) + (-100\vec{i} + 100\vec{j} + 50\vec{k}) \\ F_r &= \sqrt{(-40)^2 + (180)^2 + (50)^2}\end{aligned}$$

$$F_r = 191 \text{ N}$$

→ Ângulos diretores coordenados:

$$\begin{aligned}\cos(\theta) &= \left(\frac{40}{191}\right) \\ \theta &= \cos^{-1}\left(\frac{40}{191}\right) \\ \theta &= 77,9^\circ \\ \alpha + \theta &= 180^\circ\end{aligned}$$

$$\alpha = 102,1^\circ$$

→ Outra forma de encontrar α :

$$\cos(\alpha) = \frac{F_x}{F_r} = \left(-\frac{40}{191}\right)$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{40}{191}\right)$$

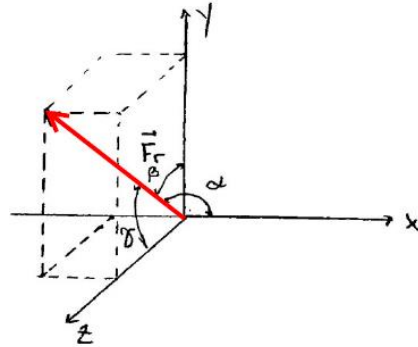
$$\alpha = 102,1^\circ$$

$$\cos(\beta) = \left(\frac{F_y}{F_r}\right) = \left(\frac{180}{191}\right)$$

$$\beta = 19,5^\circ$$

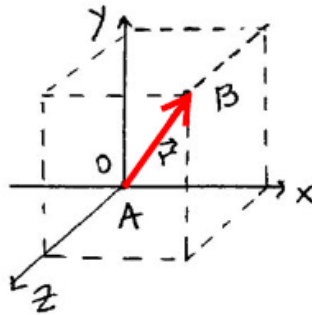
$$\cos(\gamma) = \left(\frac{F_z}{F_r}\right) = \left(\frac{50}{191}\right)$$

$$\gamma = 74,8^\circ$$



1.5 Vetor posição

Um vetor posição \vec{r} é um vetor fixo, que localiza um ponto no espaço com relação a outro. Os pontos A e B possuem coordenadas A (X_1, Y_1, Z_1) e B (X_2, Y_2, Z_2) .



Logo, o vetor \vec{r} pode ser escrito em termos dos vetores coordenados unitários:

$$\vec{r} = (X_2 - X_1)\vec{i} + (Y_2 - Y_1)\vec{j} + (Z_2 - Z_1)\vec{k}$$

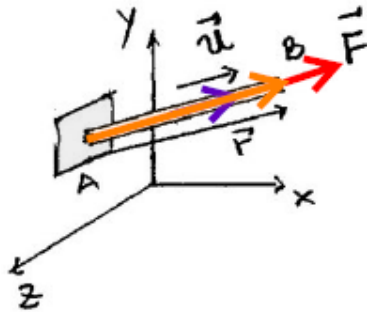
Como um vetor posição é um vetor no espaço, o módulo $|\vec{r}|$ e os ângulos diretores α, β e γ são obtidos da mesma forma vista anteriormente.

$$|\vec{r}| = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{r_x}{r}; \cos(\beta) = \frac{r_y}{r}; \cos(\gamma) = \frac{r_z}{r}$$

Vetor força orientado ao longo de uma reta

Podemos representar o vetor \vec{F} (que possui mesma linha de ação do vetor posição) em termos de \vec{r} .



Podemos definir o vetor unidade \vec{u} , que é o vetor posição normalizado:

$$\vec{u} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \therefore |\vec{u}| = 1$$

O vetor \vec{F} é dado por:

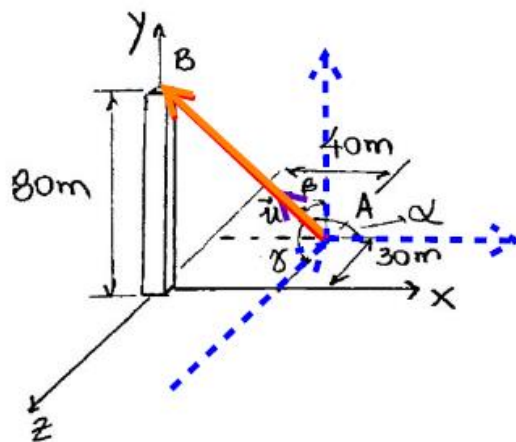
$$\vec{F} = F \cdot \vec{u}$$

$$\vec{F} = F \cdot \frac{\vec{r}}{r} = F \cdot \left[\frac{(X_2 - X_1)\vec{i} + (Y_2 - Y_1)\vec{j} + (Z_2 - Z_1)\vec{k}}{\sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}} \right]$$

Exemplo 1.6

[Beer 5ª ed.]
[Exemplo 2.7]

O cabo de sustentação de uma torre está tracionado em 2500N. Determine (a) as componentes F_x, F_y, F_z ; (b) os ângulos diretores.



- Observe que o vetor de tração age na direção da corda
- O vetor posição AB é conhecido B(0, 80, 0) e A(40, 0, -30)

$$\vec{r} = (0 - 40)\vec{i} + (80 - 0)\vec{j} + (30)\vec{k}$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{40^2 + 80^2 + 30^2}$$

$$|\vec{r}| = 94,34\text{m}$$

→ O vetor unitário ao longo da corda é:

$$\vec{u} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \therefore \vec{u} = \frac{-40\vec{i} + 80\vec{j} + 30\vec{k}}{94,34}$$

→ O vetor de tração pode ser representado em termos do vetor unitário \vec{u}

$$\vec{F} = F \cdot \vec{u}$$

$$\vec{F} = 2500 \cdot \left[\frac{-40\vec{i} + 80\vec{j} + 30\vec{k}}{94,34} \right]$$

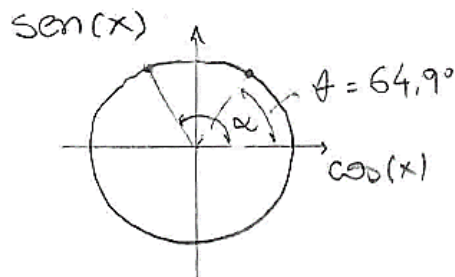
$$\vec{F} = \{-1060\vec{i} + 2120\vec{j} + 795\vec{k}\} \text{ N}$$

→ Podemos obter os ângulos diretores por:

$$\cos(\alpha) = \frac{F_x}{F} = \left(-\frac{1060}{2500} \right) \therefore \alpha = 115,1^\circ$$

$$\cos(\beta) = \frac{F_y}{F} = \left(\frac{2120}{2500} \right) \therefore \beta = 32,0^\circ$$

$$\cos(\gamma) = \frac{F_z}{F} = \left(\frac{795}{2500} \right) \therefore \gamma = 71,5^\circ$$

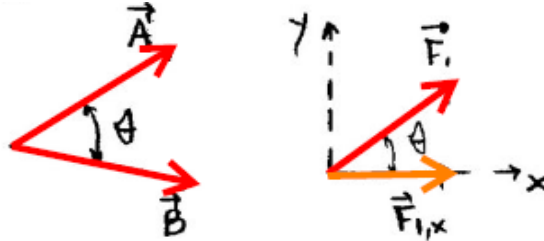


1.6 Produto escalar

[Beer 3ª ed. Pg 130]
[Hibbeler 13ª ed. Pg 69]

Ocasionalmente, em estática, é preciso encontrar o ângulo entre dois vetores. O produto escalar entre os vetores \vec{A} e \vec{B} é dado por:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A.B. \cos$$



Onde $0 \leq \theta \leq 180^\circ$ e o resultado é um escalar.

Se expressarmos o produto escalar em termos das componentes cartesianas, teremos:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}) \cdot (B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k})$$

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{B} &= (A_xB_x)\vec{i} \cdot \vec{i} + (A_yB_y)\vec{i} \cdot \vec{j} + (A_zB_z)\vec{i} \cdot \vec{k} \\ &+ (A_yB_x)\vec{j} \cdot \vec{i} + (A_yB_y)\vec{j} \cdot \vec{j} + (A_yB_z)\vec{j} \cdot \vec{k} \\ &+ (A_zB_x)\vec{k} \cdot \vec{i} + (A_zB_y)\vec{k} \cdot \vec{j} + (A_zB_z)\vec{k} \cdot \vec{k}\end{aligned}$$

$$\text{Notem que: } \vec{i} \cdot \vec{i} = 1.1. \cos(0^\circ) = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 1.1. \cos(90^\circ) = 0$$

$$\vec{i} \cdot \vec{k} = 1.1. \cos(90^\circ) = 0$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

Igualando as duas equações, temos:

$$A.B. \cos(\theta) = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

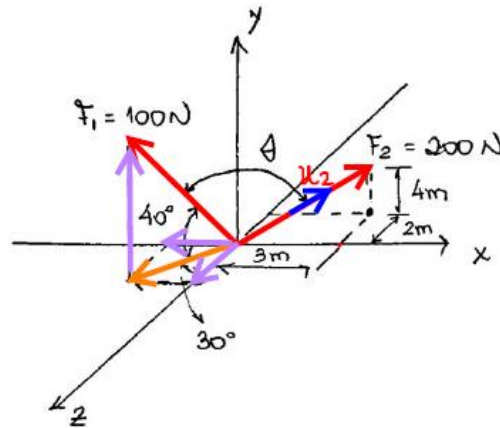
$$\cos(\theta) = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{A.B}$$

$$\theta = \cos^{-1} \left[\frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{A.B} \right]$$

Exemplo 1.7

[web.mst.edw/]

Determine o ângulo entre as forças \vec{F}_1 e \vec{F}_2 .



→ Resolução

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{1x} + \vec{F}_{1y} + \vec{F}_{1z}$$

$$F_{1y} = 64,279 \text{ N}$$

$$F_{1y} = \sin 40^\circ \cdot F$$

$$F_{1xz} = \cos 40^\circ \cdot F$$

$$F_{1xz} = 76,604 \text{ N}$$

$$F_{1x} = -\sin 30^\circ \cdot F_{1xz}$$

$$F_{1x} = -38,302 \text{ N}$$

$$F_{1z} = +\cos 30^\circ \cdot F_{1xz}$$

$$F_{1z} = 66,341 \text{ N}$$

$$\vec{F}_1 = -38,302\vec{i} + 64,279\vec{j} + 66,341\vec{k}$$

→ Como conhecemos o módulo de \vec{F}_2 e sua direção, poderíamos calcular

$$\vec{F}_2 = F_2 \cdot \frac{\vec{r}_2}{|\vec{r}_2|}$$

→ No entanto, como queremos apenas o ângulo entre \vec{F}_1 e \vec{F}_2 , que é o mesmo ângulo entre \vec{F}_1 e \vec{r}_2 , podemos apenas realizar o produto escalar $\vec{F}_1 \cdot \vec{r}_2$:

$$\vec{r}_2 = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$|\vec{r}_2| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-2)^2}$$

$$|\vec{r}_2| = 5,385 \text{ m}$$

$$|\vec{F}_1| = \sqrt{(-38,302)^2 + (64,279)^2 + (66,341)^2}$$

$$|\vec{F}_1| = 100 \text{ N}$$

$$\vec{F}_1 \cdot \vec{r}_2 = F_1 \cdot r_2 \cdot \cos\theta$$

$$(-38,302\vec{i} + 64,279\vec{j} + 66,341\vec{k}) \cdot (3\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}) = 100 \cdot 5,385 \cdot \cos\theta$$

$$-38,302 \cdot 3 + 64,279 \cdot 4 + 66,341 \cdot (-2) = 100 \cdot 5,385 \cdot \cos\theta$$

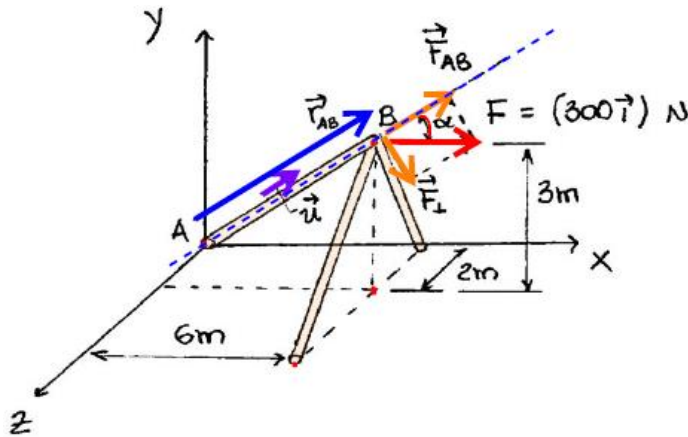
$$\cos\theta = \frac{9,528}{538,5}$$

$$\theta = 89^\circ$$

Exemplo 1.8

[Hibbeler 13ª ed.]
[Exemplo 2.17]

Determine a magnitude das componentes paralela e perpendicular à barra AB.



$$\vec{r}_{AB} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$$

→ O vetor unitário \vec{u} é o vetor posição normalizado:

$$\vec{u} = \frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}} = \frac{6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} \Rightarrow \vec{u} = 0,857\vec{i} + 0,429\vec{j} + 0,286\vec{k}$$

→ Vetor orientado ao longo de uma reta:

$$\vec{F}_{AB} = F_{AB} \cdot \vec{u}$$

$$\vec{F}_{AB} = F_{AB} \cdot [0,857\vec{i} + 0,429\vec{j} + 0,286\vec{k}]$$

→ Produto escalar entre \vec{F} e \vec{F}_{AB} :

$$\vec{F}_{AB} \cdot \vec{F} = F_{AB} \cdot F \cdot \cos\alpha$$

$$F_{AB} \cdot [0,857\vec{i} + 0,429\vec{j} + 0,286\vec{k}] \cdot (300\vec{i}) = F_{AB} \cdot 300 \cdot \cos\alpha$$

→ Lembrando que: $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$; $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$; $\vec{j} \cdot \vec{k} = 0$

$$0,857 \cdot 300 = 300 \cdot \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = 0,857$$

$$\alpha = 31,0^\circ$$

→ Componentes \vec{F}_{AB} e \vec{F}_\perp :

$$\cos \alpha = \frac{F_{AB}}{F}$$

$$\therefore F_{AB} = 257,1 \text{ N}$$

$$\sin \alpha = \frac{F_\perp}{F}$$

$$\therefore F_\perp = 154,6 \text{ N}$$

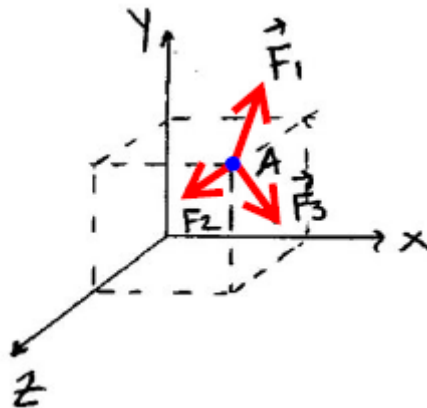
1.7 Equilíbrio de partícula

Vamos considerar as condições de equilíbrio de uma partícula ou um ponto no espaço. O ponto estará em equilíbrio ou equilíbrio estático se a força resultante atuando no ponto for nula.

$$\sum \vec{F} = 0$$

Ou que as componentes da força resultante sejam nulas:

$$\sum F_x = 0; \sum F_y = 0; \sum F_z = 0$$



Uma vez que já vimos como representar uma força em 3D, e decompor as componentes, este processo se torna mais fácil.

$$\sum F_x \vec{i} + \sum F_y \vec{j} + \sum F_z \vec{k} = \vec{0}$$

- Procedimento de análise [Beer 3ª ed. Pg. 80]
Devemos primeiro fazer um diagrama de corpo livre mostrando as forças que atuam em um dado ponto.
- Sistema de cabos suportando uma massa M:

Considerando a argola uma partícula.

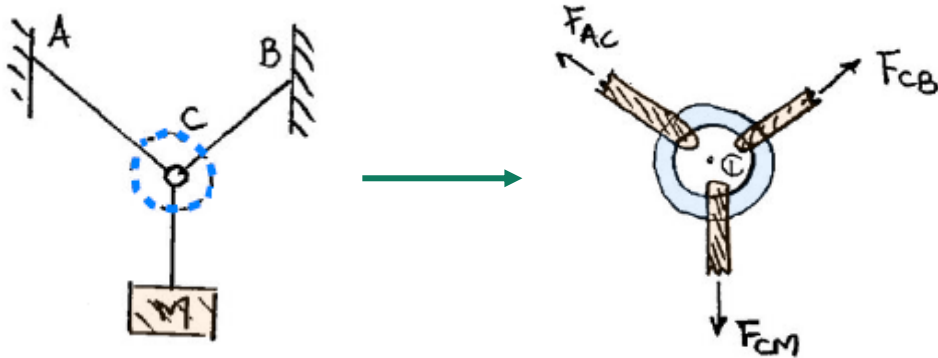
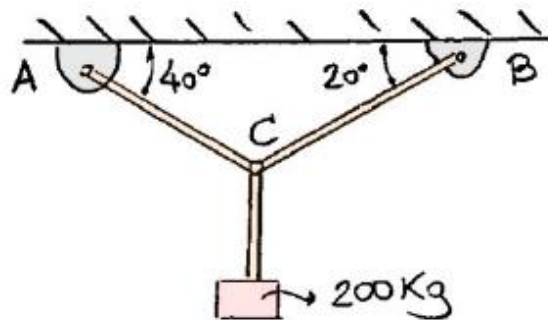


Diagrama de corpo livre da argola, onde as forças atuando nela estão representadas.

Exemplo 1.9

[Beer 9ª ed.
Exemplo 2.43]

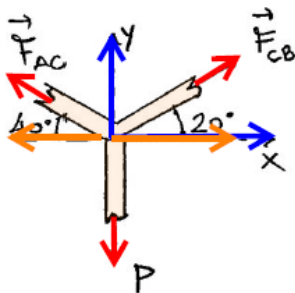
Determine as trações nos cabos AC e BC.



→ Resolução

$$\begin{aligned} P &= m \cdot g \\ P &= 200 \cdot 9,81 \\ P &= 1962 \text{ N} \end{aligned}$$

→ Diagrama de corpo livre em C:



$$F_{AC,Y} + F_{CB,Y} - P = 0$$

$$\text{sen}(40^\circ) \cdot F_{AC} + \text{sen}(20^\circ) \cdot F_{CB} - 1962 = 0$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-F_{AC,x} + F_{CB,x} = 0$$

$$-\cos(40^\circ) \cdot F_{AC} + \cos(20^\circ) \cdot F_{CB} = 0$$

$$F_{AC} = \frac{\cos(20^\circ) \cdot F_{CB}}{\cos(40^\circ)}$$

$$F_{AC} = 1,227 \cdot F_{CB}$$

→ Substituindo F_{AC} na equação (I), temos:

$$\sin(40^\circ) \cdot (1,227 \cdot F_{CB}) + \sin(20^\circ) \cdot F_{CB} = 1962$$

$$F_{CB} = 1735,5 \text{ N}$$

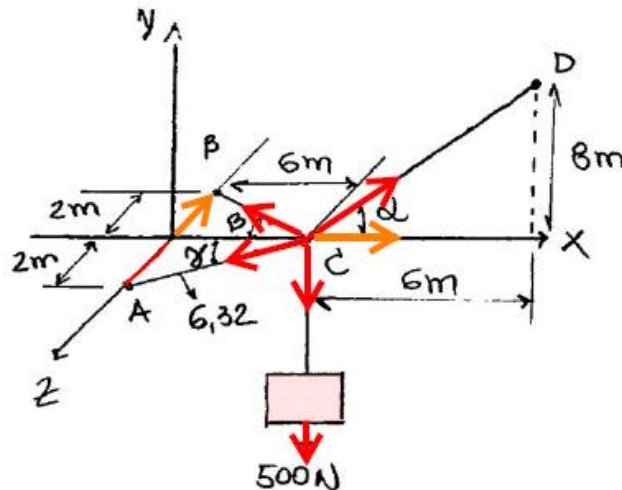
$$F_{AC} = 1,227 \cdot F_{CB}$$

$$F_{CA} = 2129,4 \text{ N}$$

Exemplo 1.10

[Hibbeler 13ª ed.]
[Exemplo 3.76]

Determine a força em cada cabo necessária para suportar o carregamento.



$$\beta = \gamma = 18,43^\circ$$

$$\sum \vec{F} = 0$$

→ Diagrama do corpo livre no ponto C:



→ Abordagem Escalar

$$(+\rightarrow) \sum F_x = 0$$

$$F_{CD,x} - F_{CB,x} - F_{CA,x} = 0$$

$$F_{CD} \cos(\alpha) - F_{CB} \cos(\beta) - F_{CA} \cos(\gamma) = 0 \quad (I)$$

$$(+\uparrow) \sum F_y = 0$$

$$F_{CD,y} - 500 = 0$$

$$F_{CD} \sin(\alpha) = 500$$

$$\frac{8}{10} F_{CD} = 500$$

$$F_{CD} = 625 \text{ N}$$

$$(+\swarrow) \sum F_z = 0$$

$$F_{AC} \sin(\gamma) - F_{BC} \sin(\beta) = 0$$

$$\text{Como } \gamma = \beta,$$

$$F_{AC} = F_{BC}$$

→ Substituindo F_{CD} na equação (I):

$$625 \cdot \cos(\alpha) - F_{CB} \cdot \cos(\beta) - F_{AC} \cdot \cos(\gamma) = 0$$

$$\frac{6}{10} \cdot 625 - 0.95 \cdot F_{CB} - 0.95 \cdot F_{AC} = 0$$

$$F_{AC} = 395,28 - F_{CB}$$

→ Logo:

$$F_{CB} = 395,28 - F_{CB}$$

$$F_{CB} = \frac{395,28}{2}$$

$$F_{BC} = 197,64 \text{ N}$$

→ Abordagem Vetorial

$$\vec{P} = -500\vec{j}$$

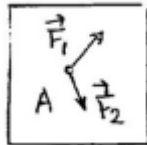
$$\vec{F}_{CD} = F_{CD} \frac{6\vec{i}+8\vec{j}}{\sqrt{6^2+8^2}} \quad \vec{F}_{CB} = F_{CB} \frac{-6\vec{i}-2\vec{k}}{\sqrt{6^2+2^2}} \quad \vec{F}_{CA} = F_{CA} \frac{-6\vec{i}+2\vec{k}}{\sqrt{6^2+2^2}}$$

Outra maneira de resolver este problema é representar os vetores de tração em termos dos seus respectivos vetores unitários (\vec{u}_a , \vec{u}_b , \vec{u}_d) e realizar o somatório das forças em cada eixo.

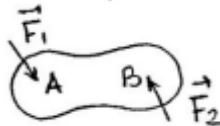
2 Corpos Rígidos

[Beer 3ª ed. Pg. 98]

Até aqui, estudamos a análise de forças em partículas ou simplesmente num ponto.



Na prática, os corpos são formados por um conjunto de pontos, onde forças podem atuar em pontos diferentes deste corpo.

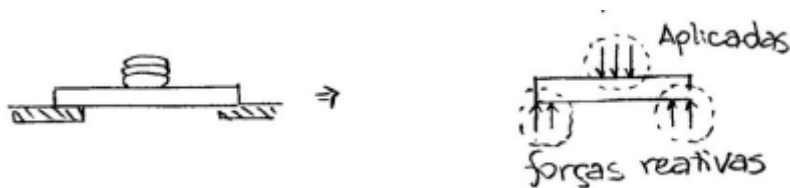


Um corpo rígido é considerado um corpo que não se deforma, com rigidez infinita. Na prática, todos os corpos se deformam, mesmo que muito pouco. Este assunto será estudado em resistência dos materiais.

Forças Externas e Internas

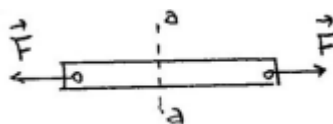
Força Externa

Representa a ação de outro ponto no corpo rígido que está sendo analisado, que podem ser forças aplicadas ou reativas

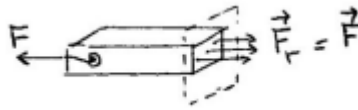


Força Interna

É a força que mantém o corpo rígido unido e é responsável por deformar o corpo. A relação entre as forças internas e a deformação é vista Mecânica dos Sólidos I.



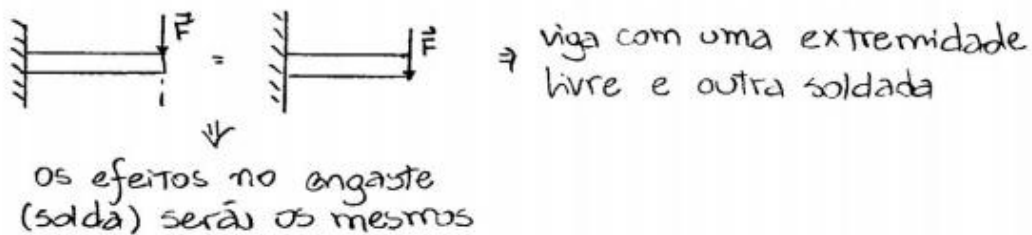
Forças desenvolvidas dentro dos corpos em decorrência de carregamentos externos.



Observando a seção transversal

Princípio da Transmissibilidade

Este princípio afirma que uma força \vec{P} atuando num corpo rígido pode ser aplicada num ponto A ou B, ou qualquer outro ponto situado na mesma linha de ação da força \vec{P} , e que os efeitos causados por \vec{P} serão os mesmos.



2.1 Produto Vetorial

Beer 3ª ed. Pg. 103
Hibbeler 13ª ed. Pg. 121
Meiram 7ª ed. Pg. 39

Para entendermos o efeito de uma força sobre um corpo rígido, que gera momento em relação a um ponto ou a um eixo (veremos na próxima seção), precisamos definir uma ferramenta matemática chamado “produto vetorial”.



Lembrando que o produto escalar entre dois vetores é definido por:

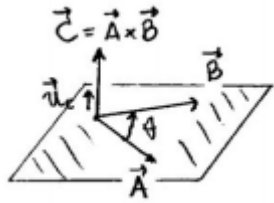
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos(\theta)$$

O produto vetorial entre os vetores \vec{A} e \vec{B} é dado por um vetor \vec{C} :

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

Onde a magnitude de \vec{C} é dada por:

$$|\vec{C}| = A \cdot B \cdot \sin(\theta)$$



A direção de \vec{C} é perpendicular ao plano contendo \vec{A} e \vec{B}

$$\vec{C} = A \cdot B \cdot \sin(\theta) \cdot \vec{u}_c$$

O sentido do vetor \vec{C} é dado pela regra da mão direita, como o vetor perpendicular à rotação anti-horária de θ de \vec{A} até \vec{B} . Logo, no exemplo acima, $\vec{D} = \vec{B} \times \vec{A}$ teria sentido para baixo.

Leis de Operação

- **Lei comutativa** não é válida:

$$\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

- **Lei associativa** é válida:

$$a(\vec{A} \times \vec{B}) = (a \cdot \vec{A}) \times \vec{B}$$

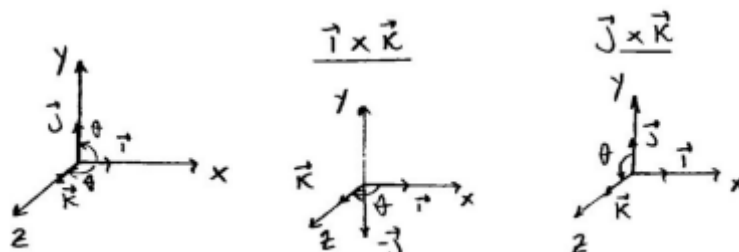
$$a(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \times (a \cdot \vec{B})$$

- **Lei distributiva** também é válida:

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{D}) = (\vec{A} \times \vec{B}) + (\vec{A} \times \vec{D})$$

Produto vetorial em termos dos vetores cartesianos unitários

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$



$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = A \cdot B \cdot \sin(\theta) \cdot \vec{u}_c$$

$$\vec{i} \times \vec{i} = 1 \cdot 1 \cdot \sin(0^\circ) = 0$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = 1 \cdot 1 \cdot \sin(90^\circ) = \vec{k}$$

$$\vec{i} \times \vec{k} = 1 \cdot 1 \cdot \sin(90^\circ) = -\vec{j}$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = 1 \cdot 1 \cdot \sin(90^\circ) = -\vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{j} = 1 \cdot 1 \cdot \sin(0^\circ) = 0$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = 1 \cdot 1 \cdot \sin(90^\circ) = \vec{i}$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = 1 \cdot 1 \cdot \sin(90^\circ) = \vec{j}$$

$$\vec{k} \times \vec{j} = 1 \cdot 1 \cdot \sin(90^\circ) = -\vec{i}$$

$$\vec{k} \times \vec{k} = 1 \cdot 1 \cdot \sin(0^\circ) = 0$$

Representando o produto vetorial de \vec{A} e \vec{B} em termos de $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ temos:

$$\vec{C} = (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}) \times (B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k})$$

$$\vec{C} = (A_x \vec{i} \times B_x \vec{i}) + (A_x \vec{i} \times B_y \vec{j}) + (A_x \vec{i} \times B_z \vec{k})$$

$$+ (A_y \vec{j} \times B_x \vec{i}) + (A_y \vec{j} \times B_y \vec{j}) + (A_y \vec{j} \times B_z \vec{k})$$

$$+ (A_z \vec{k} \times B_x \vec{i}) + (A_z \vec{k} \times B_y \vec{j}) + (A_z \vec{k} \times B_z \vec{k})$$

$$\vec{C} = (A_x B_x) \vec{k} - (A_x B_z) \vec{j} - (A_y B_x) \vec{k} + (A_y B_z) \vec{i} + (A_z B_x) \vec{j} - (A_z B_y) \vec{i}$$

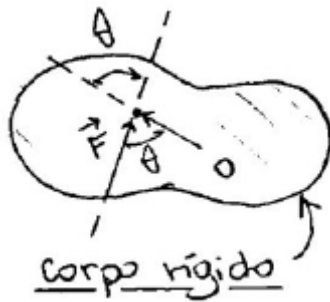
$$\vec{C} = (A_y B_z - A_z B_y) \vec{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \vec{j} + (A_x B_x - A_y B_x) \vec{k}$$

Esta expressão representa a expansão do determinante de uma matriz 3x3.

O produto vetorial $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ pode ser expresso por:

$$\vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

2.2 Momento de uma força em relação a um ponto



O momento de \vec{F} em relação a um ponto "O" do corpo rígido é dado pelo produto vetorial entre o vetor posição \vec{r} (de O a A) e o vetor força aplicado no ponto A.

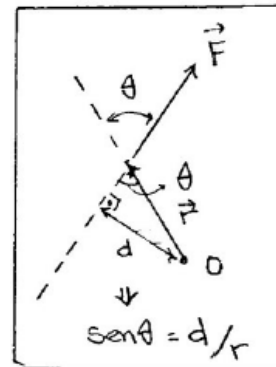
$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

Onde vimos que a magnitude M_O é dada por:

$$M_O = r \cdot F \cdot \sin(\theta)$$

$$M_O = F \cdot d$$

$$d = r \cdot \sin(\theta)$$



"d" representa a distância de "O" até a linha de ação de \vec{F} o vetor \vec{M}_O também pode ser representado em termos dos vetores cartesianos unitários $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$\vec{M}_O = (r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k}) \times (F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k})$$

ou

$$\vec{M}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Momento Resultante de um sistema de forças



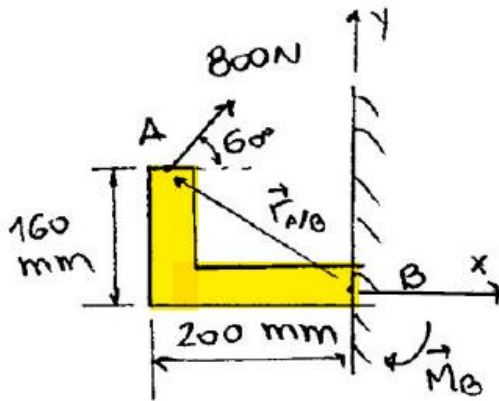
$$\vec{M}_O = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Exemplo 2.1

[Beer 5ª ed.]
[Exemplo 3.2]

Determine o momento da força em relação ao ponto B.



$$\vec{M}_B = \vec{r}_{A/B} \times \vec{F}$$

$$\vec{r}_{A/B} = (-200\vec{i} + 160\vec{j}) - (0\vec{i} + 0\vec{j})$$

$$\vec{r}_{A/B} = (-0,2\vec{i} + 0,16\vec{j}) \text{ [m]}$$

$$\vec{F} = (\cos(60^\circ) \cdot 800\vec{i} + \sin(60^\circ) \cdot 800\vec{j})$$

$$\vec{F} = (400\vec{i} + 693\vec{j}) \text{ [N]}$$

$$\vec{M}_B = (-0,2\vec{i} + 0,16\vec{j}) \times (400\vec{i} + 693\vec{j})$$

$$\vec{M}_B = (-0,2\vec{i} \times 400\vec{i}) + (-0,2\vec{i} \times 693\vec{j})$$

$$(0,16\vec{j} \times 400\vec{i}) + (0,16\vec{j} \times 693\vec{j})$$

$$\vec{M}_B = -0,21 \cdot 693 \cdot (\vec{k}) + 0,16 \cdot 400 \cdot (-\vec{k})$$

$$\vec{M}_B = [-136,8\vec{k} - 64,0\vec{k}] \text{ [N} \cdot \text{m]}$$

$$\vec{M}_B = [-202,6 \text{ N}] \cdot \vec{k}$$

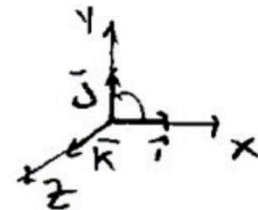
$$\vec{i} \times \vec{i} = 1 \cdot 1 \cdot \sin(0^\circ) = 0$$

$$\vec{j} \times \vec{j} = 1 \cdot 1 \cdot \sin(0^\circ) = 0$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = 1 \cdot 1 \cdot \sin(90^\circ) = \vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$$

$$|\vec{M}_B| = 203 \text{ N} \cdot \text{m}$$

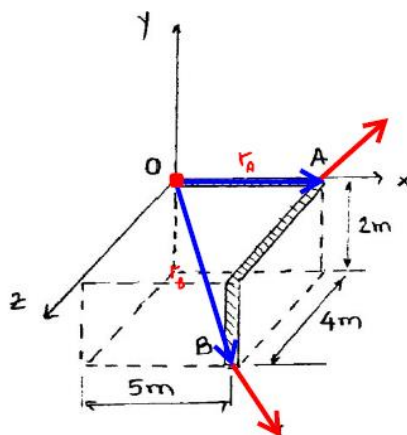


O momento \vec{M}_B é perpendicular ao plano e aponta para dentro do quadro.

Exemplo 2.2

[Hibbeler 13ª ed.]
[Exemplo 4.4]

Determine a resultante dos momentos em relação ao ponto O.



$$\vec{F}_1 = [+40\vec{i} + 20\vec{j} - 60\vec{k}] \text{ N}$$

$$\vec{F}_2 = [40\vec{i} - 30\vec{j} + 80\vec{k}] \text{ N}$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_O = \vec{r}_A \times \vec{F}_A + \vec{r}_{B/O} \times \vec{F}_B$$

$$\vec{r}_A = 5\vec{i}$$

$$\vec{r}_B = 5\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\vec{M}_O = (5\vec{i}) \times [40\vec{i} + 20\vec{j} - 60\vec{k}] + (5\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}) \times (40\vec{i} - 30\vec{j} + 80\vec{k})$$

ou

$$\vec{M}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_{Ax} & r_{Ay} & r_{Az} \\ F_{Ax} & F_{Ay} & F_{Az} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_{Bx} & r_{By} & r_{Bz} \\ F_{Bx} & F_{By} & F_{Bz} \end{vmatrix}$$

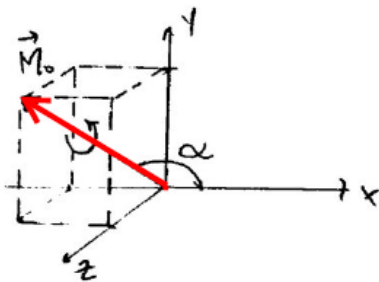
$$\vec{M}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 0 & 0 \\ 40 & 20 & -60 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -2 & 4 \\ 40 & -30 & 80 \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_O = 5 \cdot 20 \vec{k} - (-60 \cdot 5 \vec{j}) + (-2 \cdot 80 \vec{i}) + 4 \cdot 40 \vec{j} - 30 \cdot 5 \vec{k} - (-2 \cdot 40 \vec{k}) - (-30 \cdot 4 \vec{i}) - 80 \cdot 5 \vec{j}$$

$$\vec{M}_O = [-40\vec{i} + 60\vec{j} + 30\vec{k}] \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{M_{O,x}}{M_O} = \frac{-40}{78,1}$$

$$\alpha = 120,8^\circ$$



$$|\vec{M}_O| = \sqrt{(-40)^2 + 60^2 + 30^2}$$

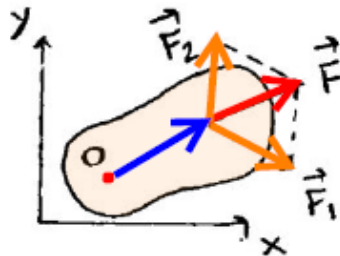
$$|\vec{M}_O| = 78,1 \text{ N} \cdot \text{m}$$

2.3 Princípio dos Momentos (Teorema de Varignon)

Foi desenvolvido por um matemático francês chamado Varignon, no século XVII. [Hibbeler 13ª Ed. Pg. 128]

Afirma que o momento produzido por uma força em torno de um ponto é igual ao momento produzido pelas componentes desta força em relação ao ponto.

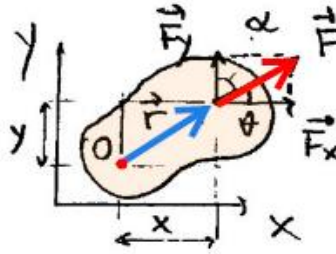
Este princípio pode ser conferido através da Lei distributiva de um ponto vetorial:



$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2$$

As componentes de \vec{F} podem possuir qualquer direção, qualquer direção, com \vec{F}_1 e \vec{F}_2 , por exemplo.

Em problemas bidimensionais é geralmente mais simples decompor o vetor \vec{F} ao longo dos eixos coordenados (x,y):

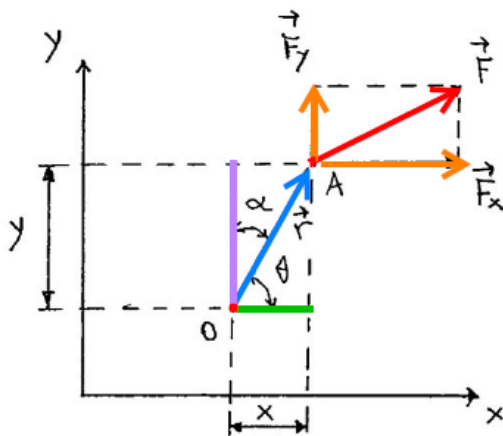


O momento das componentes \vec{F}_x e \vec{F}_y em torno de O é:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}_x + \vec{r}_x \times \vec{F}_y$$

$$\vec{M}_O = r \cdot F_x \cdot \sin \theta (-\vec{k}) + r \cdot F_y \cdot \sin \alpha (\vec{k})$$

$$\vec{M}_O = \underbrace{-F_x \cdot y \cdot \vec{k}} + \underbrace{F_y \cdot x \cdot \vec{k}}$$



$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \text{ logo } y = \sin \theta \cdot r$$

$$\sin \alpha = \frac{x}{r}, \text{ logo } x = \sin \alpha \cdot r$$

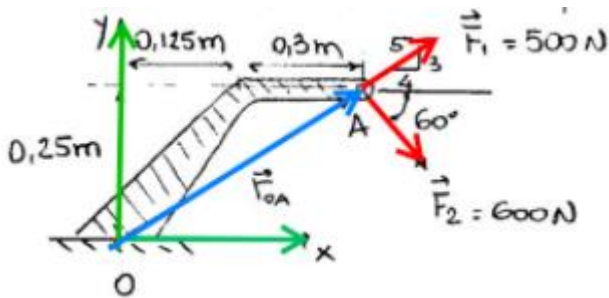
Componente perpendicular com sentido negativo (para dentro do papel)

Componente na direção perpendicular ao papel, no sentido positivo

Exemplo 2.3

[Hibbeler 13ª ed.
Problemas Fundamentais 4.8]

Determine o momento resultante produzido pelas forças em torno de O.



$$\vec{F}_1 = F_{1,x}\vec{i} + F_{1,y}\vec{j}$$

$$\vec{F}_1 = \left(\frac{4}{5}\right) \cdot 500\vec{i} + \left(\frac{3}{5}\right) \cdot 500\vec{j}$$

$$\vec{F}_2 = F_{2,x}\vec{i} + F_{2,y}\vec{j}$$

$$\vec{F}_2 = \cos 60^\circ \cdot 600\vec{i} - \sin 60^\circ \cdot 600\vec{j}$$

$$\vec{F}_r = (400 + 300)\vec{i} + (300 - 519,6)\vec{j}$$

$$\vec{F}_r = 700\vec{i} - 219,6\vec{j}$$

$$(\vec{M}_r)_O = \vec{r}_{OA} \times \vec{F}_r$$

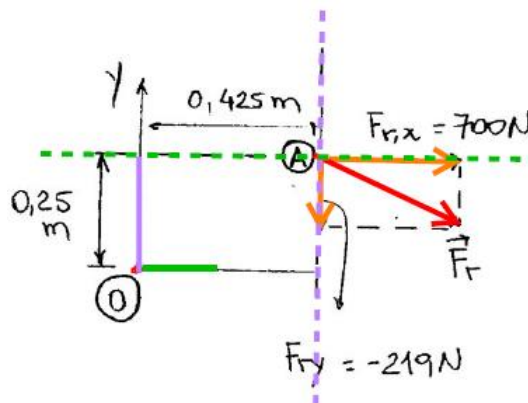
$$(\vec{M}_r)_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0,425 & 0,25 & 0 \\ 700 & -219,6 & 0 \end{vmatrix}$$

ou

Através do Teorema de Varignon

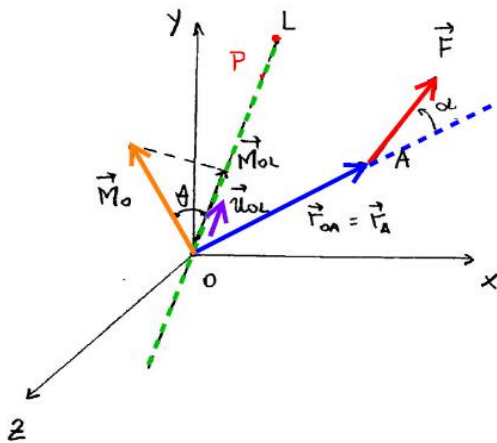
$$M_{R,O} = 700 \cdot 0,25 \cup + 219,6 \cdot 0,425 \cup$$

$$M_{R,O} = 268,34 \text{ N} \cdot \text{m} \cup \text{ [para dentro do papel]}$$



2.4 Momento de uma força em relação a um eixo

[Hibbeler 13ª ed. Pg. 139]
[Beer 9ª ed. Pg. 97]
[Meriam 7ª ed. Pg. 75]



Estamos interessados em conhecer o momento produzido pela força \vec{F} em torno do eixo OL (definido por um vetor qualquer ou 2 pontos).

Podemos primeiramente calcular o momento da força \vec{F} em torno do ponto O (ponto qualquer ao longo do eixo):

$$\vec{M}_O = \vec{r}_{OA} \times \vec{F}$$

onde \vec{M} é um vetor perpendicular ao plano formado entre \vec{r}_A e \vec{F} com sentido de acordo com a regra da mão direita. Se conhecemos o eixo OL, conhecemos o vetor unitário \vec{u}_{OL} que indica a direção de OL. Se aplicarmos o produto escalar entre \vec{M}_O e \vec{u}_{OL} podemos obter o ângulo entre os dois vetores e, conseqüentemente, a projeção de \vec{M}_O ao longo do eixo OL, dado por \vec{M}_{OL} .

$$\vec{M}_O \cdot \vec{u}_{OL} = |\vec{M}_O| \cdot |\vec{u}_{OL}| \cdot \cos \theta$$

$$\vec{M}_O \cdot \vec{u}_{OL} = M_O \cdot \cos \theta$$

onde, $M_O \cdot \cos(\theta) = M_{OL}$ é a magnitude \vec{M}_{OL} , com direção \vec{u}_{OL} .

$$\text{Logo, } M_{OL} = \vec{M}_O \cdot \vec{u}_{OL} \rightarrow M_{OL} = (\vec{r}_{OA} \times \vec{F}) \cdot \vec{u}_{OL}$$

Produto Vetorial

Produto Escalar

E o vetor completo:

$$\vec{M}_{OL} = M_{OL} \cdot \vec{u}_{OL}$$

$$\vec{M}_{OL} = [(\vec{r}_A \times \vec{F}) \cdot \vec{u}_{OL}] \cdot \vec{u}_{OL}$$

Desta forma, a magnitude de \vec{M}_{OL} pode ser expressa por:

$$|\vec{M}_{OL}| = \vec{M}_O \cdot \vec{u}_{OL}$$

$$|\vec{M}_{OL}| = (\vec{r}_{A,x} \times \vec{F}) \cdot \vec{u}_{OL}$$

$$\vec{M}_{OL} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_{A,x} & r_{A,y} & r_{A,z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \cdot [u_{OL,x} \vec{i} + u_{OL,y} \vec{j} + u_{OL,z} \vec{k}]$$

$$|\vec{M}_{OL}| = [(r_{A,x} \cdot F_z - r_{A,z} \cdot F_y) \vec{i} + (r_{A,z} \cdot F_x - r_{A,x} \cdot F_z) \vec{j} + (r_{A,x} \cdot F_y - r_{A,y} \cdot F_x) \vec{k}] \cdot [u_{OL,x} \vec{i} + u_{OL,y} \vec{j} + u_{OL,z} \vec{k}]$$

Como $\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cos(\theta)$, todos os produtos $\vec{i} \cdot \vec{j}$, $\vec{i} \cdot \vec{k}$, $\vec{j} \cdot \vec{i}$, $\vec{j} \cdot \vec{k}$, $\vec{k} \cdot \vec{i}$, $\vec{k} \cdot \vec{j}$ serão nulos, e $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$. Logo,

$$|\vec{M}_{OL}| = u_{OL,x}(r_{A,y} \cdot F_z - r_{A,z} \cdot F_y) + u_{OL,y}(r_{A,z} \cdot F_x - r_{A,x} \cdot F_z) + u_{OL,z}(r_{A,x} \cdot F_y - r_{A,y} \cdot F_x)$$

ou

$$\vec{M}_{OL} = \begin{vmatrix} u_{OL,x} & u_{OL,y} & u_{OL,z} \\ r_{A,x} & r_{A,y} & r_{A,z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

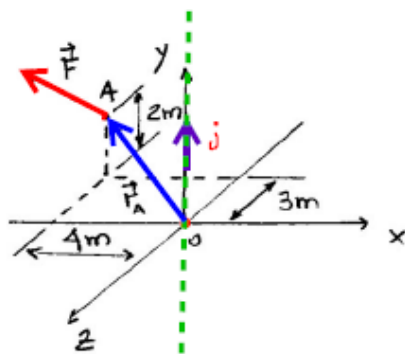
E a direção de $|\vec{M}_{OL}|$ é dada por: $\vec{M}_{OL} = \overrightarrow{M_{OL}} = M_{OL} \cdot \vec{u}_{OL}$

Onde $\vec{r}_A = \overrightarrow{r_{A,x}} \cdot \vec{i} + \overrightarrow{r_{A,y}} \cdot \vec{j} + \overrightarrow{r_{A,z}} \cdot \vec{k}$ é um vetor posição entre um ponto qualquer ao longo do eixo OL e o ponto de aplicação da força \vec{F} .

Exemplo 2.4

[F4 – 16 Hib. 13ª ed.]
Adaptado

Determine a magnitude do momento que a força \vec{F} exerce em relação ao eixo y.



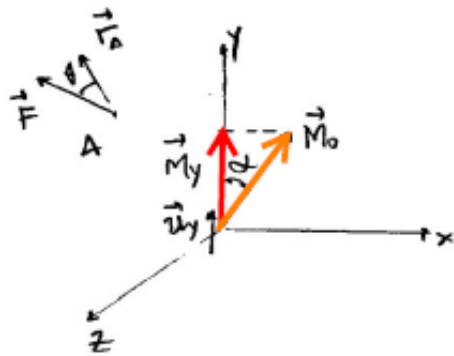
$$\vec{F} = \{-20\vec{i} + 50\vec{j} + 30\vec{k}\} \text{ N}$$

$$\vec{r}_{OA} = \{-4\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}\} \text{ m}$$

$$\vec{M}_O = \vec{r}_{OA} \times \vec{F}$$

$$\vec{M}_O \cdot \vec{u}_y = M_y \cdot 1 \cdot \cos(x)$$

$$\vec{M}_O \cdot \vec{u}_y = M_y$$



→ O vetor unitário \vec{u}_y é \vec{j} . Logo,

$$M_y = \vec{M}_o \cdot \vec{u}_y \rightarrow \text{vetor unitário do eixo}$$

$$M_y = (\vec{r}_a \times \vec{F}) \cdot \vec{u}_y$$

$$M_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ r_{Ax} & r_{Ay} & r_{Az} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \cdot \vec{u}_y = \begin{vmatrix} u_{y,x} & u_{y,y} & u_{y,z} \\ r_{A,x} & r_{A,y} & r_{A,z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\text{Como } \vec{u}_y = \vec{j}, u_{y,x} = u_{y,z} = 0$$

$$M_y = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & -3 \\ -20 & 50 & 30 \end{vmatrix} = 60 + 120$$

$$M_y = |\vec{M}_y| = 180 \text{ N.m}$$

O vetor \vec{M}_y é dado por:

$$\begin{aligned} \vec{M}_y &= M_y \cdot \vec{u}_y \\ \vec{M}_y &= 180\vec{j} \end{aligned}$$

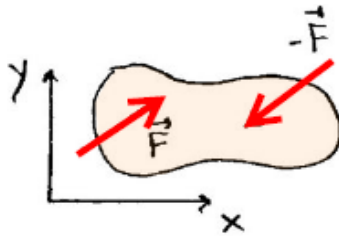
2.5 Momento de um Binário

[Hibbeler 13ª ed. Pg. 148]
 [Beer 9ª ed. Pg. 108]
 [Meriam 7ª ed. Pg. 50]

Duas forças \vec{F} e $-\vec{F}$, com mesmo módulo, linhas de ação paralelas e sentidos opostos formam um binário.

Notem que a soma vetorial das forças é nula:

$$\Sigma \vec{F} = 0$$



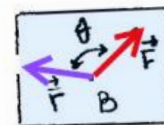
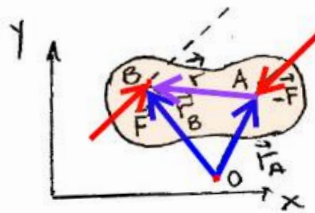
A rotação de um volante
é efeito de um binário



Portanto, não ocorre translação ao longo de x ou y. No entanto, este binário tende a rotacionar o corpo. Podemos encontrar o valor do binário como a soma dos momentos gerados pelas duas forças em relação à qualquer ponto arbitrário, mesmo fora do corpo.

$$\vec{M} = (\vec{r}_b \times \vec{F}) + (\vec{r}_a \times -\vec{F})$$

$$\vec{M} = (\vec{r}_b - \vec{r}_a) \times \vec{F}$$



Binário
para
dentro

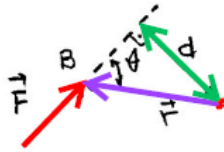
Ou, em termos do vetor posição \vec{r} entre os pontos A e B:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Desta forma, podemos observar que o momento de um binário ou binário depende apenas da força e das distâncias entre os pontos de aplicação das forças.

Onde:

$$|\vec{M}| = r \cdot F \cdot \sin \theta$$



$$\sin \theta = \frac{d}{r}$$

$$d = r \cdot \sin \theta$$

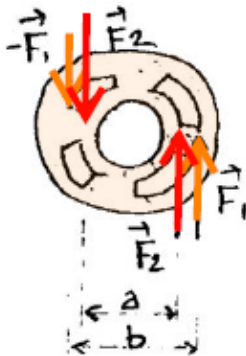
“d” é distância perpendicular entre as linhas de ação.

$$|\vec{M}| = F \cdot d$$

O vetor \vec{M} será perpendicular ao plano contendo os dois vetores força e neste exemplo possui sentido para dentro do quadro.

Binário equivalente

Se dois binários produzem um momento de mesma magnitude e direção, estes são ditos equivalentes.



$$M_1 = F_1 \cdot b$$

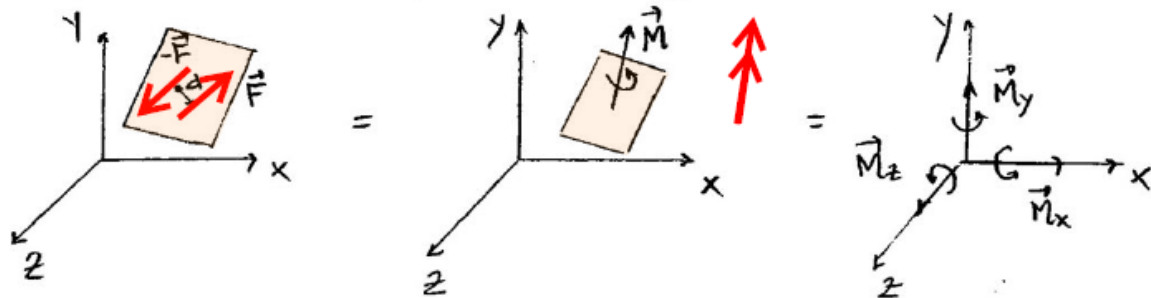
$$M_2 = F_2 \cdot a$$

Se $M_1 = M_2 \rightarrow$ binários equivalentes

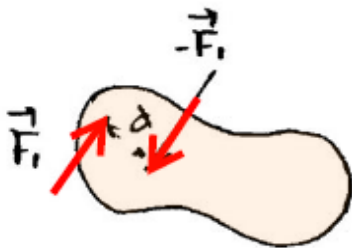
Quanto menor a distância, mais força é exigida.

Representação de binários

Binários são representados por vetores com um símbolo indicando a rotação do binário.



Nota: Um momento binário ou simplesmente binário é um vetor que depende apenas da distância entre as forças paralelas (mesma magnitude e sentidos opostos) e causa o mesmo efeito rotacional independente de onde o binário seja aplicado no corpo rígido.



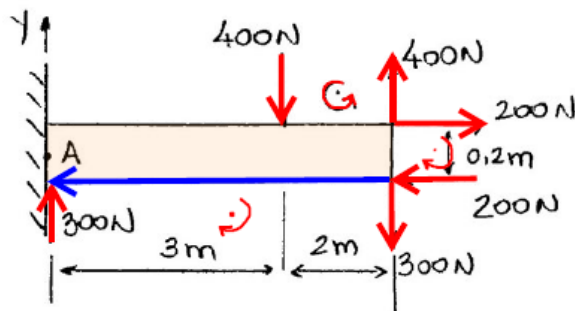
- Em qualquer ponto deste corpo, o momento resultante é:

$$M_r = F_1 \cdot d$$

Exemplo 2.5

[F4 – 19, Hib. 13ª ed.]

Determine a resultante dos binários atuando na viga



Podemos resolver este problema de maneira:

→ Escalar: obtendo a distância perpendicular entre as forças que formam os binários.

→ Vetorial: produto vetorial entre os vetores posição e força. (Sendo “d” distância perpendicular).

$$\vec{M} = \vec{r} \cdot \vec{F}$$

$$|\vec{M}| = F \cdot d$$

→ Onde d é a distância perpendicular.

$$\sum \vec{M}_R = \vec{M}_{400} + \vec{M}_{200} + \vec{M}_{300}$$

$$\sum \vec{M}_R = (400 \cdot 2)\vec{k} + (-200 \cdot 0,2)\vec{k} + (-300 \cdot 5)\vec{k}$$

$$\sum \vec{M}_R = -740 \vec{k} \text{ [N} \cdot \text{m]}$$

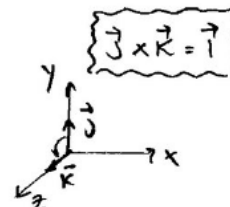
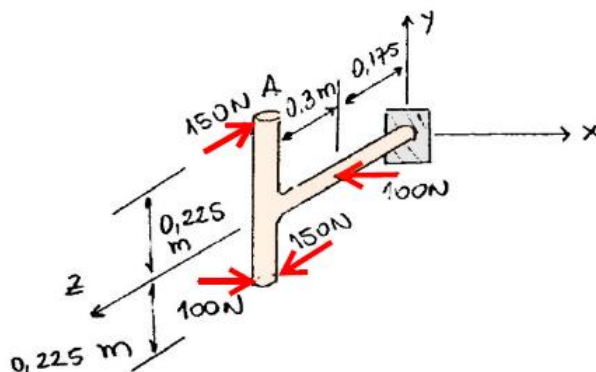
(para dentro do plano)

Exemplo 2.6

[Beer 9ª ed.]

[Sample prob. 3.6]

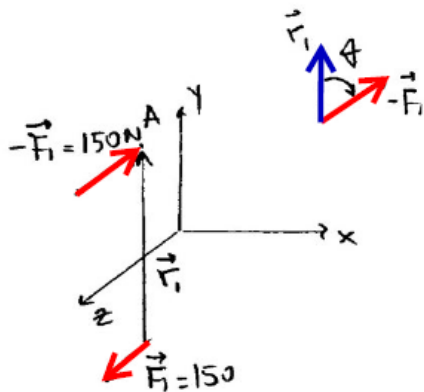
Determine as componentes do binário equivalente aos dois binários.



$$\vec{M}_r = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$$

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1$$

$$\vec{M}_1 = (0,45\vec{j}) \times (-150\vec{k})$$



$$\vec{M}_1 = -67,5 \vec{i}$$

(ou resolve-se pelo determinante)

$$\vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$

$$\vec{M}_2 = (0,225\vec{j} - 0,3\vec{k}) \times (-100\vec{i})$$

$$\vec{M}_2 = -22,5\vec{j} \times \vec{i} + 30\vec{k} \times \vec{i}$$

$$\vec{M}_2 = -22,5(-\vec{k}) + 30(\vec{j})$$

$$\vec{M}_2 = [30\vec{j} + 22,5\vec{k}] \text{ N} \cdot \text{m}$$

→ Outra maneira de se obter \vec{M}_2 :

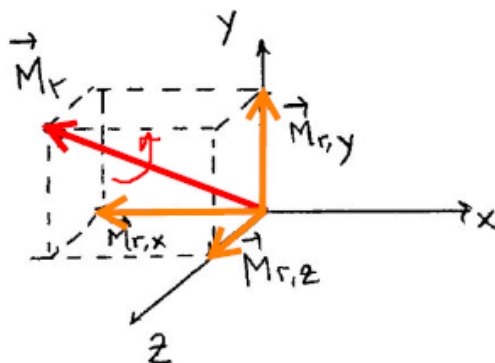
$$\vec{M}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0,225 & -0,3 \\ -100 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -0,3 \cdot -100\vec{j} - (-100 \cdot 0,225\vec{k})$$

O momento resultante

$$\vec{M}_r = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 \text{ é}$$

$$\vec{M}_r = [-67,5\vec{i} + 30\vec{j} + 22,5\vec{k}] \text{ N} \cdot \text{m}$$

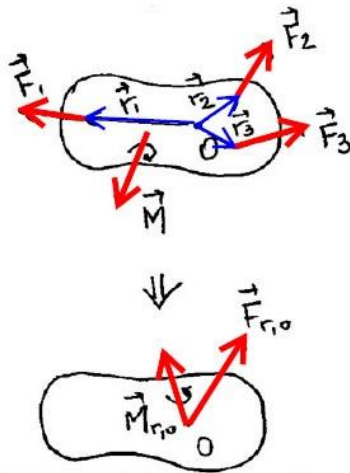
→ Análise fisicamente de acordo com a regra da mão direita



2.6 Redução de um sistema de forças e um binário

[Hibbeler 13ª ed. Pg. 161]
 [Beer 5ª ed. Pg. 123]
 [Meriam 7ª ed. Pg. 88]

É possível reduzir ou simplificar um dado sistema de forças em um corpo rígido sem alterar os efeitos externos em um dado ponto do corpo rígido.



Podemos construir um sistema equivalente de força e binário atuando apenas no ponto "O", de tal maneira que os efeitos de translação e rotação no ponto "O" sejam idênticos ao efeito com o sistema original de forças e binários,

$$\vec{F}_{r,o} = \sum_{i=1}^{nf} \vec{F}$$

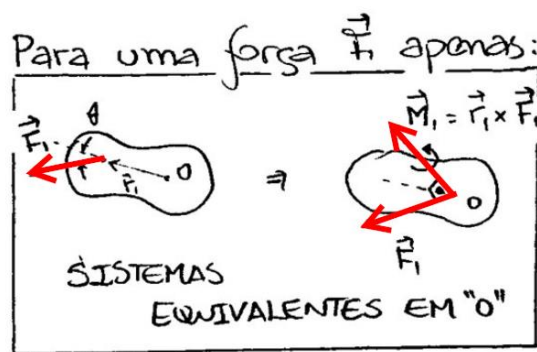
$$\vec{M}_{r,o} = \sum_{i=1}^{nf} \vec{M}_o + \sum_{i=1}^{nb} \vec{M}$$

Sistema equivalente de força e binário no ponto O.

onde $\sum_{i=1}^{nf} \vec{M}_o$ é o somatório vetorial dos momentos gerados pelas "nf" forças em

torno do ponto "O": $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ e $\sum_{i=1}^{nb} \vec{M}$ é a soma vetorial dos momentos dos binários.

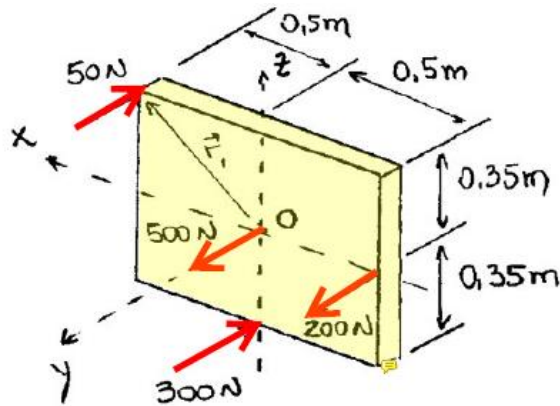
Note que temos uma equivalência única para cada ponto do corpo rígido, pois os vetores posição \vec{r} são alterados.



Exemplo 2.7

[Meriam 7ª ed.
Sample prob 2/17]

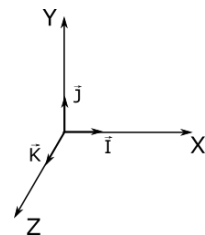
Determine um sistema equivalente de forças e momentos no ponto "O".



$$\begin{aligned}\vec{F}_{r,o} &= \sum_{i=1}^{nf} \vec{F} \\ \vec{M}_{r,o} &= \sum_{i=1}^{nf} \vec{M}_o + \sum_{i=1}^{nb} \vec{M}\end{aligned}$$

$$\vec{F}_{r,o} = (-50 + 500 - 300 + 200) \vec{j}$$

$$\vec{F}_{r,o} = \{350 \vec{j}\} \text{N}$$



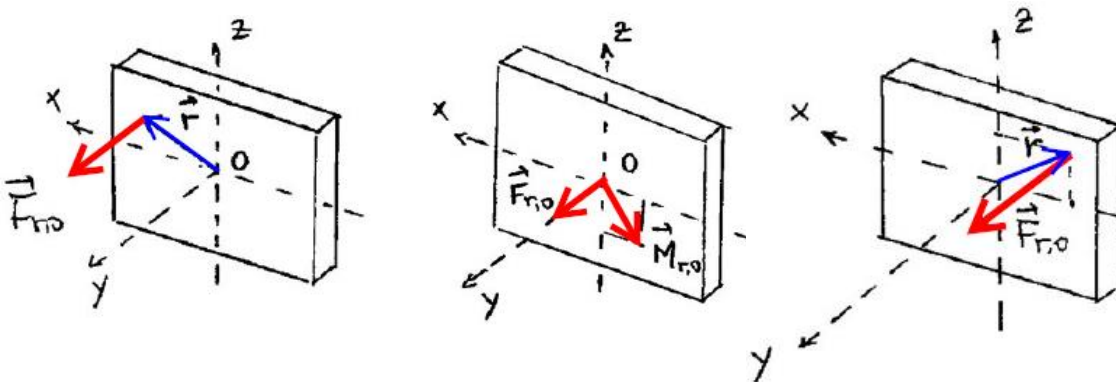
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = (r.F.\sin(\theta)). \vec{u}$$

$$\vec{M}_{r,o} = (0,5\vec{i} + 0,35\vec{k}) \times (-50\vec{j}) + (\vec{0}) \times (500\vec{j}) + (-0,5\vec{i}) \times (-300\vec{j}) + (-0,35\vec{k}) \times (-200\vec{j})$$

$$\vec{M}_{r,o} = (17,5\vec{i} - 25\vec{k}) + (-100\vec{k}) + (-105\vec{i})$$

$$\vec{M}_{r,o} = [-87,5 \vec{i} - 125\vec{k}] \text{ N.m}$$

Se quiséssemos um sistema equivalente ao ponto "O" com apenas uma força resultante, devemos garantir que essa força, com vetor posição \vec{r} , exerça um momento $\vec{M}_{r,o} = -87,5\vec{i} - 125\vec{k}$ em torno do ponto "O".



$$\vec{M}_{r,o} = \vec{r} \times \vec{F}_{r,o}$$

$$-87,5\vec{i} - 125\vec{k} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \times (350\vec{j})$$

$$-87,5\vec{i} - 125\vec{k} = (350x\vec{k}) + (-350z)\vec{i}$$

$$\text{Logo, } -87,5 = 350x \text{ e } -125 = -350z$$

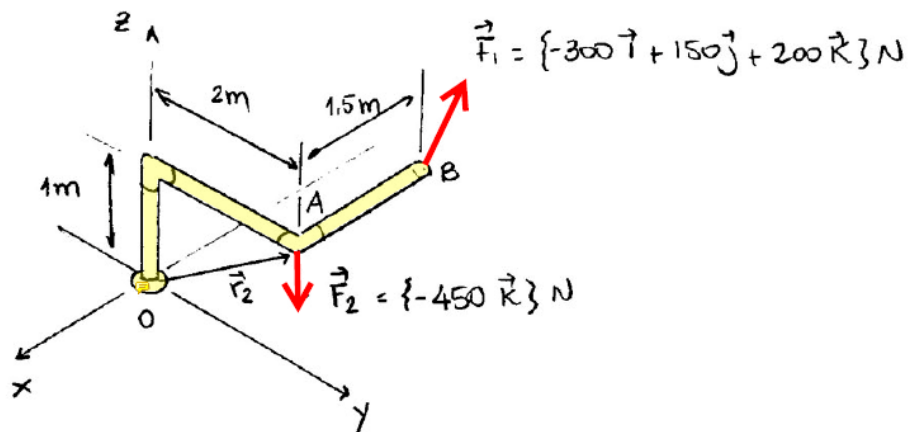
$$x = -0,357\text{m} \quad z = 0,250\text{m}$$

$$\vec{r} = \{-0,357\vec{i} + 0,250\vec{k}\} \text{ m}$$

Exemplo 2.8

[F4 – 29, Hib. 13ª ed.]

Determine o sistema equivalente força-binário no ponto “o”.



$$\vec{F}_{r,o} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\vec{F}_{r,o} = \{-300\vec{i} + 150\vec{j} - 250\vec{k}\} \text{ N}$$

$$\vec{M}_{r,o} = \sum_{i=1}^{nc} \vec{M}_{i,o} + \sum_{i=1}^{nb} \vec{M}_i$$

$$\vec{M}_{r,o} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$

$$\vec{M}_{r,o} = (-1,5\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) \times (-300\vec{i} + 150\vec{j} - 250\vec{k}) + (2\vec{j} + \vec{k}) \times (-450\vec{k})$$

ou

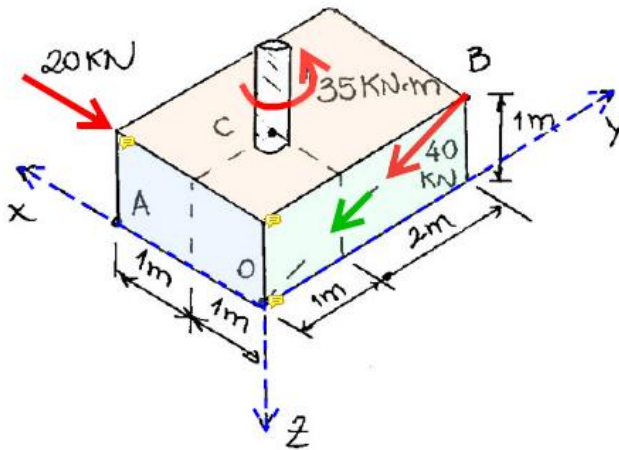
$$\vec{M}_{r,o} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1,5 & 2 & 1 \\ -300 & 150 & 200 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -450 \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_{r,o} = [400\vec{i} - 300\vec{j} - 225\vec{k} + 600\vec{k} - 150\vec{i} + 300\vec{j}] - 900\vec{i}$$

$$\vec{M}_{r,o} = \{-650\vec{i} + 375\vec{k}\} \text{ N.m}$$

Exemplo 2.9

Determine o sistema equivalente força-binário no ponto "A".



Solicitações atuantes

$$\vec{F}_{20} = -20\vec{i} \text{ [kN]}$$

Precisamos determinar o vetor unitário ao longo de \vec{F}_{40} .

$$\vec{r}_{BO} = -3\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{u}_{BO} = \frac{\vec{r}_{BO}}{|\vec{r}_{BO}|} \therefore \vec{u}_{BO} = \frac{-3\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{3^2 + 1^2}}$$

$$\vec{u}_{BO} = -0,9487\vec{j} + 0,3122\vec{k}$$

$$\vec{F}_{40} = F_{40} \cdot \vec{u}_{BO} = 40 \cdot [-0,9487\vec{j} + 0,3122\vec{k}]$$

$$\vec{F}_{40} = \{-37,947\vec{j} + 12,649\vec{k}\} \text{ kN}$$

Momento binário no ponto C: \vec{M}_{35} possui apenas direção em z, com sentido anti-horário, ou negativo segundo o eixo z. Logo,

$$\vec{M}_{35} = -35\vec{k} \text{ [kN.m]}$$

→ Força Resultante no ponto A:

$$\vec{F}_{r,A} = \vec{F}_{20} + \vec{F}_{40}$$

$$\vec{F}_{r,A} = -20\vec{i} + (-37,95\vec{j} + 12,65\vec{k})$$

$$\vec{F}_{r,A} = \{-20\vec{i} + -37,95\vec{j} + 12,65\vec{k}\} \text{ kN}$$

→ Momento Resultante no ponto A: $\vec{M}_{R,A}$

$$\vec{M}_{R,A} = \vec{M}_{35} + \underbrace{(\vec{r}_1 \times \vec{F}_{20})}_{\text{Momento provocado pela força de 20 kN}} + \underbrace{(\vec{r}_2 \times \vec{F}_{40})}_{\text{Momento provocado pela força de 40 kN}}$$

Momento provocado pela força de 20 kN

Momento provocado pela força de 40 kN

Onde \vec{r}_1 e \vec{r}_2 são os vetores posição entre o ponto de análise A e os pontos de aplicação das forças. Logo:

$$\vec{r}_1 = -\vec{k} \text{ [m]} \text{ e } \vec{r}_2 = -2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} \text{ [m]}$$

$$\vec{M}_{R,A} = (-35\vec{k}) + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -1 \\ -20 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -37,95 & 12,65 \end{vmatrix}$$

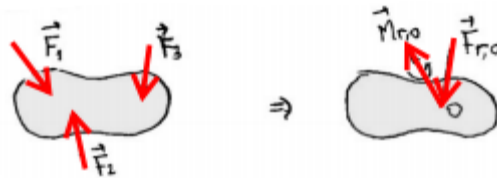
$$\vec{M}_{R,A} = (-35\vec{k}) + (20\vec{j}) + [37,95\vec{i} + 75,895\vec{k} - 37,95\vec{i} + 25,298\vec{j}]$$

$$\vec{M}_{R,A} = \{45,30\vec{j} + 40,90\vec{k}\} \text{ kN.m}$$

3. Equilíbrio de Corpos Rígidos

Beer 3ª ed. Pg. 215
Hibbeler 13ª ed. Pg. 199
Meriam 7ª ed. Pg. 109

Vimos anteriormente que um corpo rígido submetido a uma série de forças e momentos de binário podem ser reduzidos à apenas uma força concentrada \vec{F}_r e um binário $\vec{M}_{r,o}$ em torno de um ponto O.



$$\vec{F}_r = \sum_{i=1}^{nf} \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_{r,o} = \sum_{i=1}^{nf} (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) + \sum_{i=1}^{nb} \vec{M}_i$$

As condições necessárias e suficientes para o equilíbrio de um corpo rígido são obtidas ao impor que:

$$\vec{F}_r = 0$$

$$\vec{M}_{r,o} = 0$$

Onde o ponto O pode ser tomado como qualquer ponto na estrutura. Logo,

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$\sum \vec{M} = \vec{0}$$

Decompondo cada força e momento em termos das componentes cartesianas, temos:

$$\sum \vec{F}_x = 0$$

$$\sum \vec{M}_x = 0$$

$$\sum \vec{F}_y = 0$$

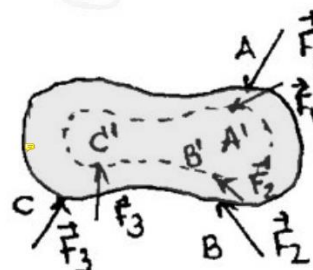
$$\sum \vec{M}_y = 0$$

$$\sum \vec{F}_z = 0$$

$$\sum \vec{M}_z = 0$$

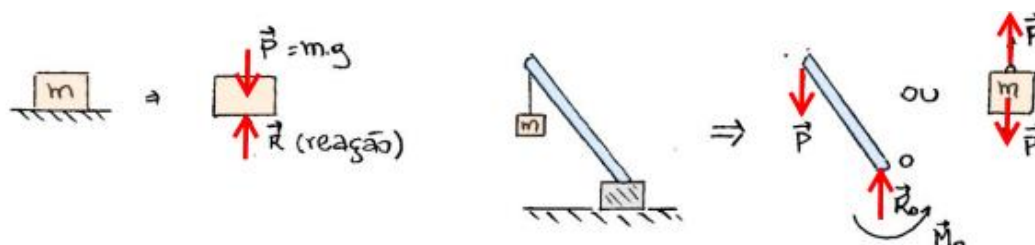
Notem que estamos assumindo forças e momentos em corpos rígidos, ou seja, eles permanecem rígidos e não se deformam ao serem submetidos à carregamentos. Na prática, para alguns materiais a deformação deve ser levada em consideração, pois:

- Variação na direção das forças
- Variação dos vetores posição



Para materiais rígidos (aço, concreto), os níveis de deformação são baixos e podemos desconsiderar esses dois efeitos.

Para aplicar as equações de equilíbrio, devemos primeiramente identificar as forças que agem no corpo. Fazemos isso através do Diagrama de Corpo Livre (DCL), onde isolamos o corpo e posicionamos as forças externas (aplicadas e reativas) e os momentos externos.



Realizar o DCL de um corpo é de fundamental importância para a resolução de problemas em Mecânica.

3.1 Reações nos Vínculos em 2D

Vínculos são elementos que impedem o deslocamento de um ponto em um elemento estrutural. Os vínculos ou apoios são utilizados para conectar a estrutura do solo ou a outros corpos, restringindo, assim, seus movimentos sob a ação de forças.

As cargas tendem a mover a estrutura, mas os apoios impedem os movimentos exercendo forças opostas ou reações, mantendo assim as estruturas em equilíbrio.

Um apoio que impede a translação de uma estrutura em determinada direção exerce uma força de reação sobre a estrutura nesta direção. Do mesmo modo, um apoio que impede a rotação da estrutura exerce um momento de reação sobre o mesmo eixo.

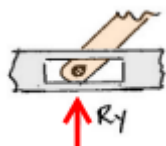
Imagine esta lapiseira, podendo estar:

- apoiada: apenas reação de força vertical;
- articulada ou rotulada (por pinos), onde pode rotacionar livremente, mas possui reações de força horizontal e vertical;
- engastada-livre: reações horizontais e verticais de força e reação de momento, pois a rotação é impedida.

Os tipos de apoios ou vínculos normalmente utilizados em estruturas planas serão ilustrados a seguir.

Rolete, superfície lisa ou pino deslizando

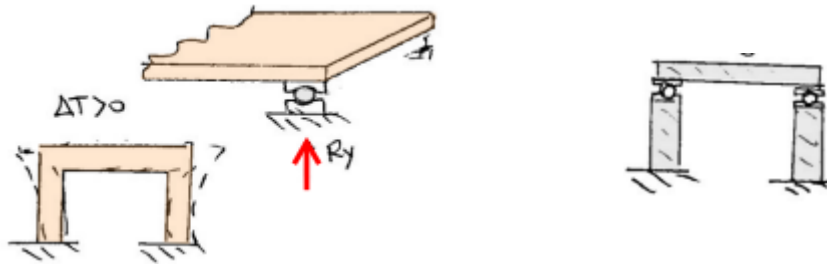
Este é um vínculo também chamado de articulado móvel, pois permite o giro, assim como o deslocamento em uma direção.



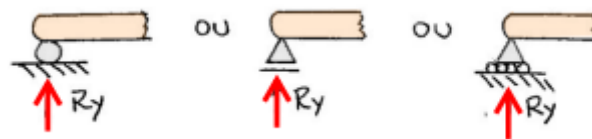
Apoio simples ou de 1º gênero

Aplicado em pontes rodoviárias, pórticos, etc.

Sem liberação de translação horizontal, tensões são adicionadas. Com os apoios móveis, as dilatações não influenciam os pilares.



Símbolos ou Representação:

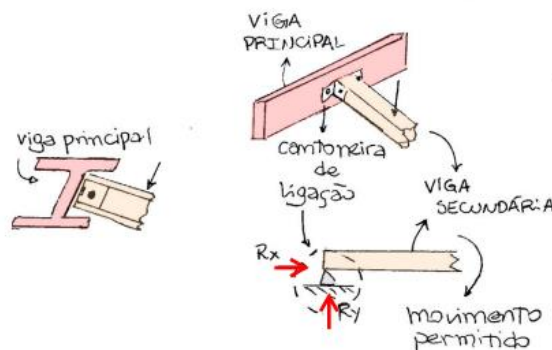


Articulação, rótula ou pino

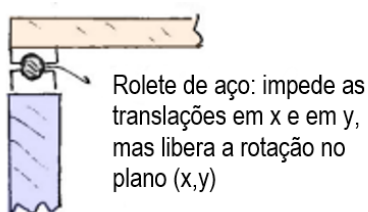
O vínculo que permite apenas o giro ou rotação relativa e impede os 2 movimentos de translação e denominado vínculo articulado fixo.

Aplicações:

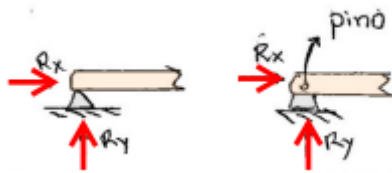
- Conexão viga-viga



- Conexão pilar-viga:



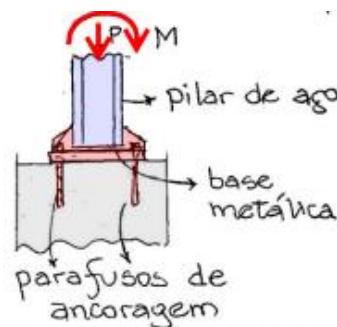
- Símbolos ou Representação:



Engastamento ou apoio fixo (rebitada, parafusada, soldada, etc)

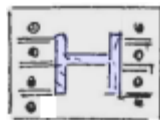
O engastamento perfeito leva a restrição de todos os graus de liberdade da estrutura no vínculo.

Para produzir uma condição de engastamento na base de uma coluna de aço, o projetista deve especificar uma placa base de aço grossa, reforçada por parafusos de ancoragem fortemente tensionados.



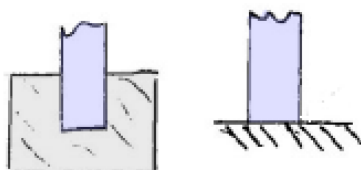
Observação: se somente a alma do perfil I estivesse fixa, a rotação estaria liberada.

Vista superior da ligação:



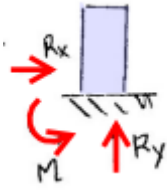
→ Os parafusos de ancoragem das mesas do perfil garantem o impedimento da rotação.

Outras alternativas: soldagem ou aterramento



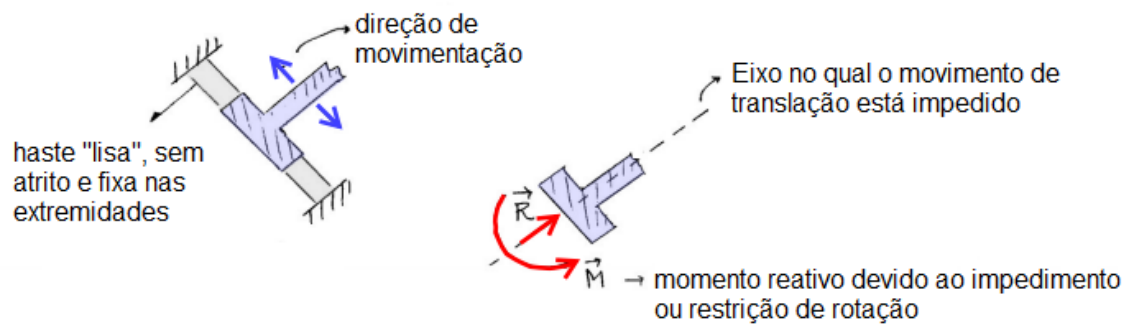
Também chamado de apoio de 3º gênero.

→ Símbolos ou Representação:

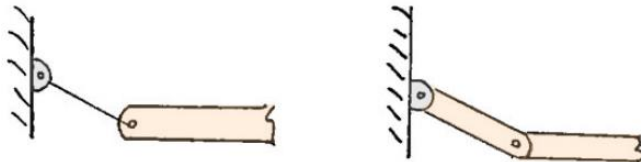


→ Reações com 3 Incógnitas

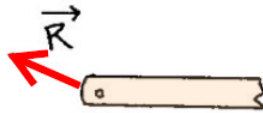
Membro fixo deslizante sobre haste lisa



Cabos ou hastes



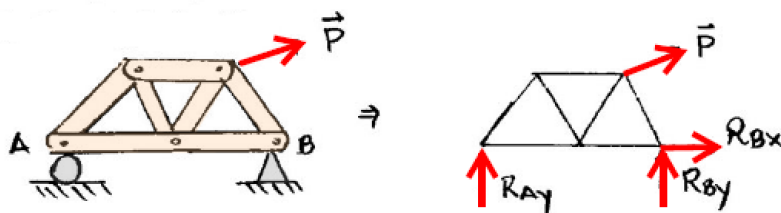
→ Reação na direção do cabo com uma incógnita, sendo \vec{R} com linha de ação conhecida.



Exemplos de DCL

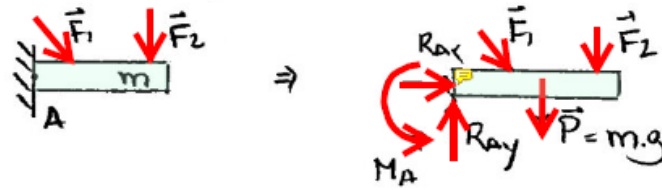
[Meriam 7ª ed. Pg. 188]

- Treliza plana

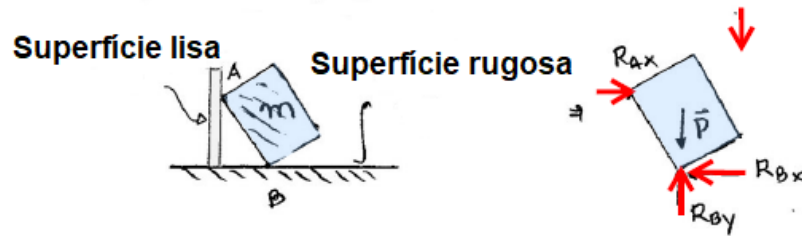


Os sentidos das reações na treliza são arbitrários

- Viga engastada



- Bloco apoiado

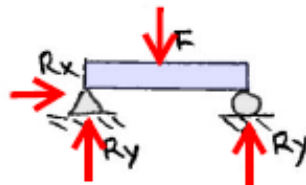
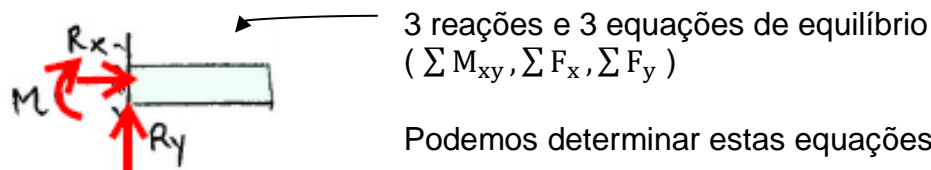


3.2 Tipos de estrutura

Existem 3 tipos de estrutura quanto ao número de reações

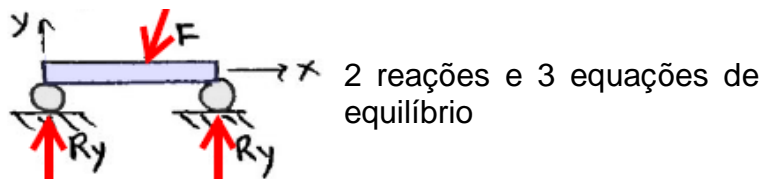
Isoestática

Quando o número de reações é igual ao número de equações de equilíbrio (problema estaticamente determinado).



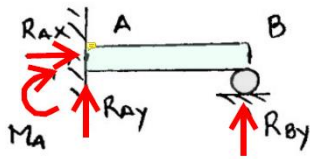
Hipoestática

Quando o número de reações é menor que o número de equações de equilíbrio. Neste caso, só há impedimento de movimento vertical, a viga está livre para mover-se horizontalmente. Logo, só ocorrerá equilíbrio se $F_x = 0$.



Hiperestática

Quando o número de reações é maior que o número de equações de equilíbrio. Neste caso, não é possível determinar as reações apenas com as 3 equações de equilíbrio. Chamamos este problema de estaticamente indeterminado.

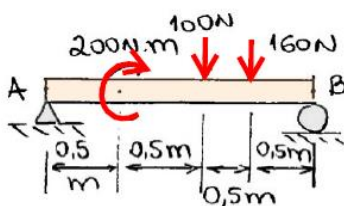


É possível resolver estes problemas utilizando equações adicionais de deformação/deflexão e inclinação, como será visto em Resistência dos Materiais.

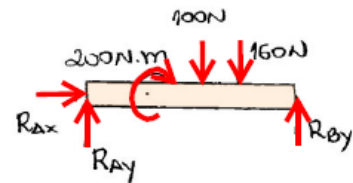
Exemplo 3.1

[Ex. 2.1, Arcanjo]

Calcule as reações nos apoios da viga simplesmente apoiada.



Realizamos, primeiramente, o DCL da viga AB, isolando-a e identificando as forças agindo sobre ela.



Note que em B temos somente R_{By} (restrição de movimento na direção vertical), pois a viga pode girar e transladar totalmente em B. O mesmo aconteceria caso o ponto B da viga estivesse apoiado em uma superfície sem atrito.

Este é um problema estaticamente determinado, pois é uma viga isostática: 3 reações.

Aplicando as equações de equilíbrio:

$$\sum F_x = 0$$

$$R_{Ax} = 0$$

Não existe força horizontal para ocorrer alguma resistência.

$$\sum F_y = 0$$

$$(+\uparrow) \sum F_y = 0$$

$$R_{Ay} - 100 - 160 + R_{By} = 0$$

$$R_{Ay} + R_{By} = 260$$

Uma equação e duas variáveis!

Devemos realizar o somatório de momentos em torno de um ponto específico,

de preferência o ponto com maior número de reações ou forças.

$$\curvearrowright + \sum M_A = 0$$

\therefore

$$200 + 100 \cdot 1 + 160 \cdot 1,5 - R_{By} \cdot 2 = 0$$

$$R_{By} = 270 \text{ N}$$

Substituindo R_{By} em (I):

$$R_{Ay} = -10 \text{ N}$$

Obs.: Qual o significado do sinal negativo? Indica que o sentido da força atua no sentido oposto ao estabelecido.

Método para checar o resultado

$$\curvearrowright + \sum M_B = 0$$

$$+R_{Ay} \cdot 2 + 200 - 100 \cdot 1,0 - 160 \cdot 0,5 = 0$$

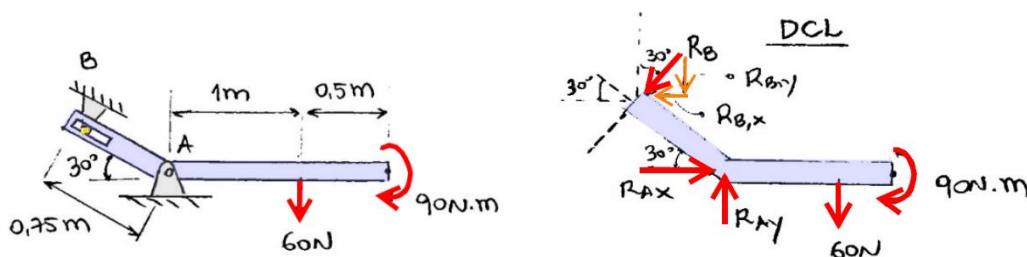
$$-20 + 200 - 100 - 80 = 0$$

Ok!

Exemplo 3.2

[Ex. 5.7, Hibbeler 13ª ed.]

Determine as componentes da reação no ponto A



Aplicando as equações de equilíbrio:

$$\rightarrow +\sum F_x = 0 \quad \therefore -\sin 30^\circ \cdot R_B + R_{Ax} = 0 \text{ (I)}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad \therefore -\cos 30^\circ \cdot R_B + R_{Ay} - 60 = 0 \text{ (II)}$$

$$+\curvearrowright \sum M_A = 0 \quad \therefore +R_B \cdot 0,75 - 1 \cdot 60 - 90 = 0$$

$$R_{By} = 200 \text{ N}$$

Problema estaticamente determinado.

→ Substituindo R_{By} em (I):

$$-\sin 30^\circ \cdot 200 + R_{Ax} = 0$$

$$R_{Ax} = 100 \text{ N}$$

→ Substituindo R_{By} em (II):

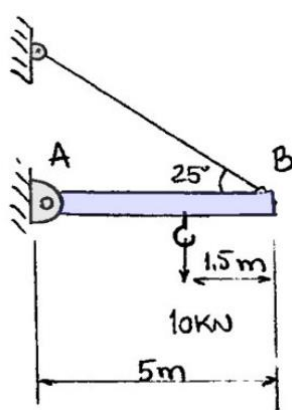
$$-\cos 30^\circ \cdot 200 + R_{Ay} - 60 = 0$$

$$R_{Ay} = 233 \text{ N}$$

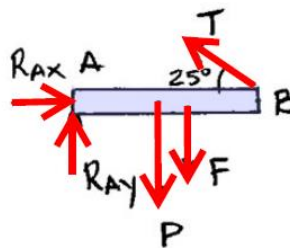
Exemplo 3.3

[Ex. 3.4, Meriam 7ª ed.]

Determine a magnitude da tração no cabo e da força no pino A. Considere uma viga com massa de 95 kg por metro de comprimento.



DCL



DCL da viga AB: sempre recomendá-vel realizar o DCL do membro sujeito aos carregamentos externos!

$$P = (95,5) \cdot 9,81$$

$$P = 4659,8 \text{ N}$$

$$\rightarrow +\sum F_x = 0 \therefore -\cos 25^\circ \cdot T + R_{Ax} = 0 \text{ (I)}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \therefore \sin 25^\circ \cdot T + R_{Ay} - 10 - 4,6598 = 0 \text{ (II)}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \therefore R_{Ay} + \sin 25^\circ \cdot T - 10 - 4,6598 = 0$$

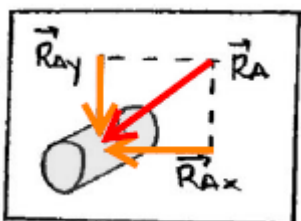
$$T = 22,08 \text{ N}$$

↓
Ponto com mais incógnitas

→ A força total atuando no pino é:

$$|\vec{R}_A| = \sqrt{20^2 + 5,3^2} = 20,71 \text{ N}$$

→ Substituindo T em (I) e (II):

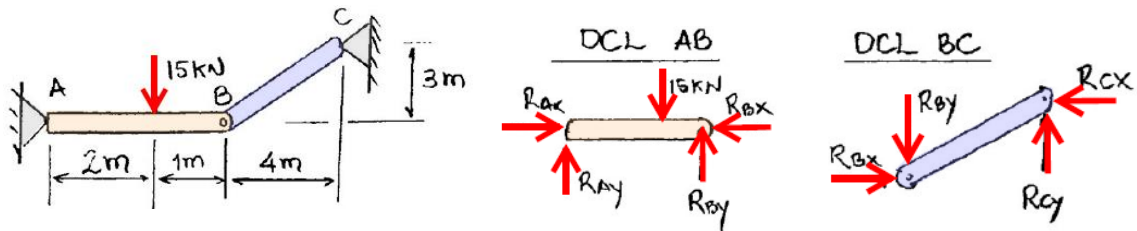


$$R_{Ay} = 5,33 \text{ N}$$

$$R_{Ax} = 20,0 \text{ N}$$

Exemplo 3.4

Calcule as reações nos apoios da viga:



Este é um problema de articulação, onde devemos fazer o DCL de cada corpo e colocar as forças no pino articulado. Por ação e reação as forças devem atuar em sentidos opostos, pois não há força externa em B.

→ Barra AB

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \therefore -R_{Ay} \cdot 3 + 15 \cdot 1 = 0$$

$$R_{Ay} = 5 \text{ KN}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \therefore R_{Ay} - 15 + R_{By} = 0$$

$$R_{By} = 10 \text{ KN}$$

$$\rightarrow +\sum F_x = 0 \therefore -R_{Bx} + R_{Ax} = 0 \text{ (II)}$$

Substituindo R_{Bx} em (II),

$$R_{Ax} = -13,3 \text{ KN}$$

→ Barra BC

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \therefore R_{Cy} \cdot 4 + R_{Cx} \cdot 3 = 0 \text{ (I)}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \therefore -R_{By} + R_{Cy} = 0$$

$$R_{Cy} = 10 \text{ KN}$$

Logo, substituindo R_{Cy} em (I).

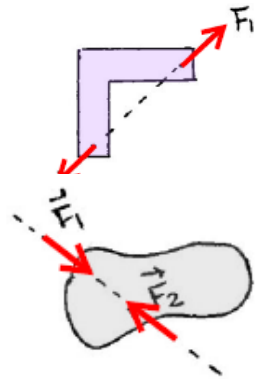
$$R_{Cx} = -13,3 \text{ KN}$$

$$\rightarrow +\sum F_x = 0 \therefore R_{Bx} - R_{Cx} = 0$$

$$R_{Bx} = -13,3 \text{ KN}$$

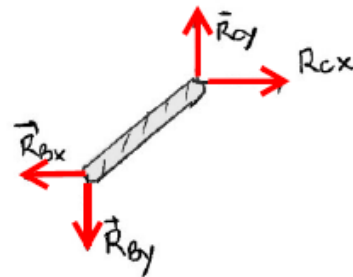
3.3 Membros de duas forças

Um caso muito comum, na prática são corpos rígidos submetidos a (apenas) 2 forças. Neste caso, para satisfazer as equações de equilíbrio ($\sum \vec{F}_r = \vec{0}$) e ($\sum \vec{M}_B = \vec{0}$), as duas forças devem ter o mesmo módulo, direção ou linha de ação e sentidos opostos.



Observe que no exemplo anterior a força resultante no ponto C: $\vec{R}_C = \vec{R}_{Cx} + \vec{R}_{Cy}$ é oposta à $\vec{R}_B = \vec{R}_{Bx} + \vec{R}_{By}$.

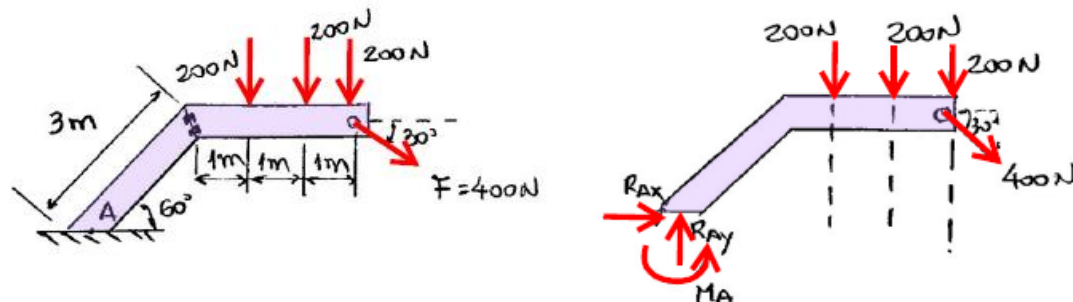
Consequência das equações de equilíbrio!



Exemplo 3.5

[F5 – 4, Hibbeler 13ª ed.]

Determine as componentes da reação em A.



É sempre recomendável realizar o equilíbrio dos momentos primeiro e em torno do ponto com maior número de incógnitas.

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0$$

$$M_A - 200(\cos 60^\circ \cdot 3 + 1) - 200(\cos 60^\circ \cdot 3 + 2) - 200(\cos 60^\circ \cdot 3 + 3) - \sin 30^\circ \cdot 400 \cdot (\cos 60^\circ \cdot 3 + 3) - \cos 30^\circ \cdot 400(\sin 60^\circ \cdot 3) = 0$$

$$M_A = 3900 \text{ N.m}$$

$$\rightarrow +\sum F_x = 0 \quad \therefore \cos 30^\circ \cdot 400 + R_{Ax} = 0$$

$$R_{Ax} = -346 \text{ N}$$

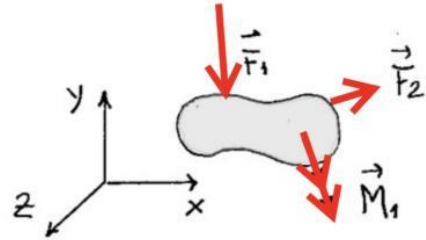
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad \therefore R_{Ay} - 3 \cdot 200 - \sin 30^\circ \cdot 400 = 0$$

$$R_{Ay} = 800 \text{ N}$$

3.4 Reações nos vínculos em 3D

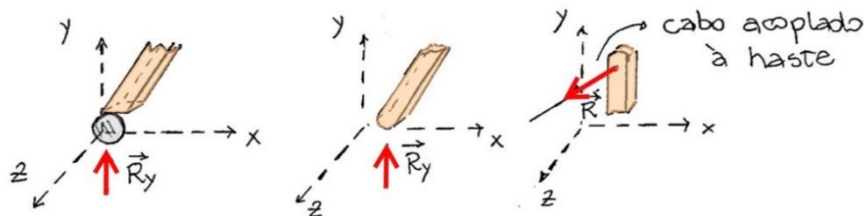
Para problemas em 3D devemos satisfazer as condições de equilíbrio nos 3 eixos coordenados:

$\sum F_x = 0$	$\sum M_x = 0$
$\sum F_y = 0$	$\sum M_y = 0$
$\sum F_z = 0$	$\sum M_z = 0$

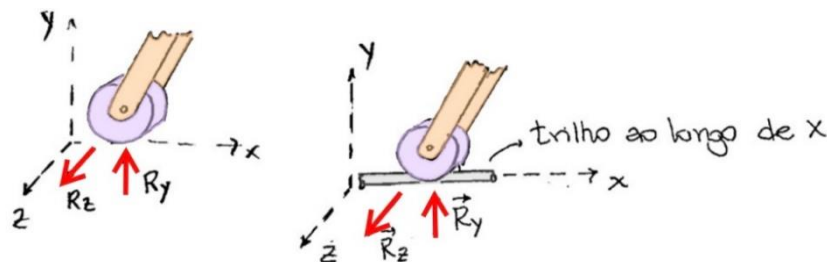


Portanto, os vínculos de uma estrutura devem ser analisados nas 3 dimensões.

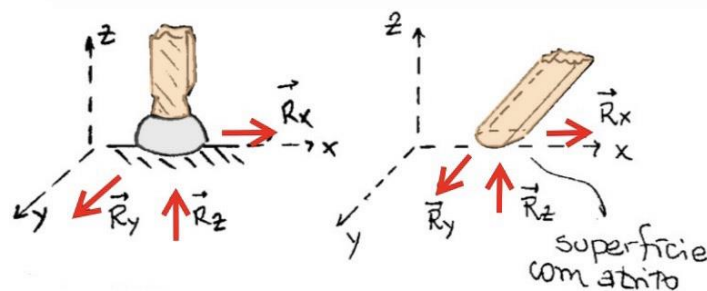
- Apoios esféricos, superfície lisa (sem atrito) e cabos impedem a translação em apenas uma única direção.



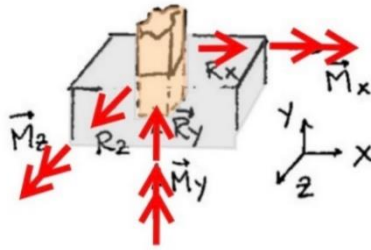
- Roletes sobre superfície lisa, rodas sobre trilho impedem a translação em 2 direções.



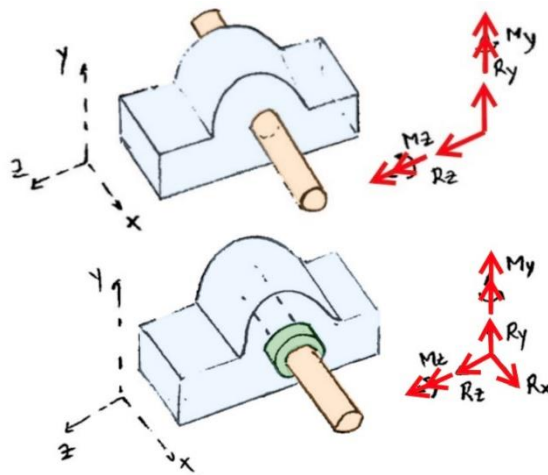
- Superfície rugosa e junta esférica ou rótula restringe as translações nas 3 direções.



- Apoio fixo ou engastamento (restrições de translações e momento).

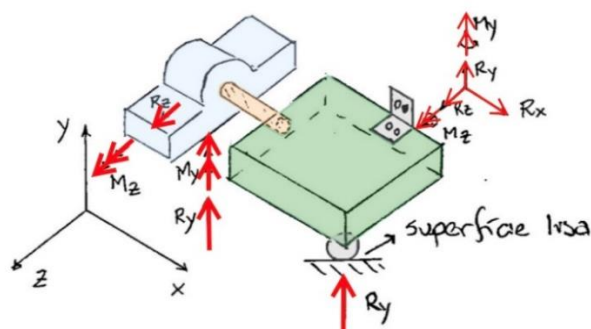


- Dobradiças e mancais: Restringem translações e momentos dependendo da configuração.



- Pode transladar e rotacionar sem resistência ao longo de x.
- Mancais de deslizamento com anel de bloqueio: visa bloquear o deslocamento axial do eixo. Logo, possibilita apenas rotacionar ao longo do eixo x.
- Dobradiças seguem o mesmo princípio.

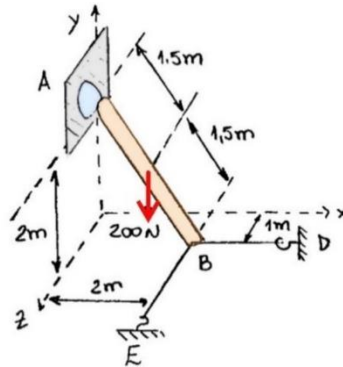
Estabeleça as reações do exemplo a seguir:



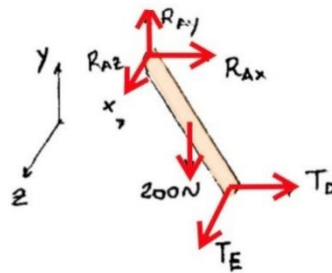
Exemplo 3.6

[Hibbeler 13ª ed.]
[Exemplo 5.19]

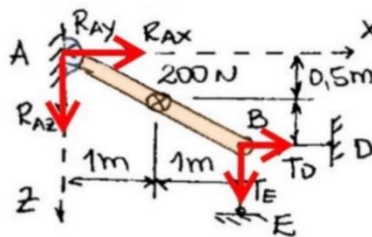
A haste AB está sujeita a uma força de 200 N no ponto C. Determine as reações da junta esférica A e as tensões nos cabos BD e BE.



→ Diagrama de corpo livre
(5 variáveis)



→ Vista plano (x,z)



→ Abordagem escalar:

(1) $\rightarrow^+ \sum F_x = 0 \therefore T_D + R_{AX} = 0$	}	(1) $R_{AX} = -100\text{N}$
(2) $+\uparrow \sum F_y = 0 \therefore R_{Ay} - 200 = 0$		(2) $R_{Ay} = 200\text{N}$
(3) $\swarrow_+ \sum F_z = 0 \therefore T_E + R_{AZ} = 0$		(3) $R_{AZ} = -50\text{N}$
(4) $\sum M_{A,x} = 0 \therefore 0,5 \cdot 200 - 2 \cdot T_E = 0$		(4) $T_E = 50\text{N}$
(5) $\sum M_{A,y} = 0 \therefore 1 \cdot T_D - 2 \cdot T_E = 0$		(5) $T_D = 100\text{N}$
(6) $\sum M_{A,z} = 0 \therefore -200 \cdot 1 + 2 \cdot T_D = 0$		(6) $T_D = 100\text{N}$

Verificação dos resultados no Ponto B

$$(7) \sum M_{B,x} = 0 \therefore -200 \cdot 0,5 + 1 \cdot R_{Ay} + 2 \cdot R_{AZ} = 0$$

→ Abordagem vetorial:

$$\sum M_A = \vec{0}$$

$$\vec{r}_{AB} \times \vec{T}_E + \vec{r}_{AB} \times \vec{T}_D + \vec{r}_1 \times (-200\vec{j}) = \vec{0}$$

$$\vec{r}_{AB} \times (T_E\vec{k} + T_D\vec{i}) + \vec{r}_1 \times (-200\vec{j}) = \vec{0}$$

$$(2\vec{i} - 2\vec{j} + 1\vec{k}) \times (T_E\vec{k} + T_D\vec{i}) + (1\vec{i} - 1\vec{j} + 0,5\vec{k}) \times (-200\vec{j}) = \vec{0}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ T_D & 0 & T_E \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0,5 \\ 0 & -200 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= [-2 \cdot T_E\vec{i} + T_D\vec{j} + 2T_D\vec{k} - 2T_E\vec{j}] + [-200\vec{k} + 100\vec{i}] \cdot \vec{0}$$

$$-2 \cdot T_E + 100 = 0$$

$$T_D - 2T_E = 0$$

$$-2 \cdot T_D - 200 = 0$$

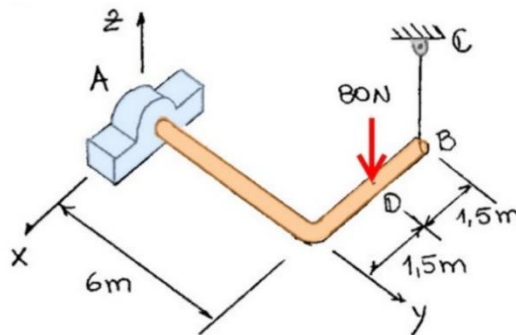
$$T_E = 50 \text{ N}$$

$$T_D = 100 \text{ N}$$

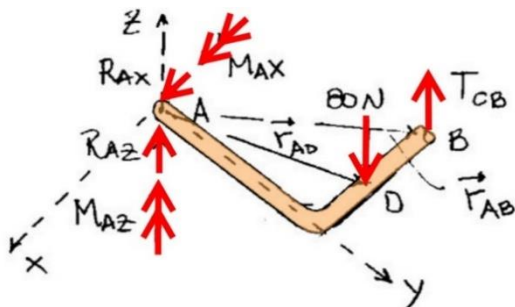
Exemplo 3.7

[Hibbeler 13ª ed.]
[Problema F5 – 12]

Determine as componentes de reação que o mancal A e o cabo BC exercem na haste.



→ DCL da haste



→ Abordagem escalar

$$(1) \quad \curvearrowright + \sum F_x = 0 \therefore R_{Ax} = 0$$

$$(2) \quad \searrow + \sum F_y = 0 \therefore 0 = 0$$

$$(3) \quad +\uparrow \sum F_z = 0 \therefore R_{Az} - 80 + T_{CB} = 0$$

Substituindo T_{CB} na equação (3)

$$R_{Az} - 80 + T_{CB} = 0$$

$$R_{Az} = 40 \text{ N}$$

$$(4) \quad \curvearrowright + \sum M_{a,x} = 0 \therefore M_{a,x} - 80 \cdot 6 + T_{CB} \cdot 6 = 0$$

$$T_{CB} = 40 \text{ N}$$

$$(5) \quad \searrow + \sum M_{a,y} = 0 \therefore -80 \cdot (1,5) + T_{CB} \cdot 3 = 0$$

$$(6) \quad +\uparrow \sum M_{a,z} = 0 \therefore M_{a,z} = 0$$

$$M_{a,z} = 240 \text{ N.m}$$

→ Abordagem Vetorial

$$\sum \vec{M}_a = \vec{0} \therefore [M_{a,x} \vec{i} + M_{a,z} \vec{k}] + [\vec{r}_{AD} \times (-80 \vec{k})] + [\vec{r}_{AD} \times \vec{T}_{CB}] = \vec{0}$$

$$M_{a,x} \vec{i} + M_{a,z} \vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1,5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -80 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & T_{CB} \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$M_{a,x} \vec{i} + M_{a,z} \vec{k} + [-480 \vec{i} - 120 \vec{j}] + [6 T_{CB} \vec{i} + 3 T_{CB} \vec{j}] = \vec{0}$$

Logo, $\vec{i} \therefore M_{a,x} - 480 + 6 T_{CB} = 0$

$\vec{j} \therefore -120 + 3 T_{CB} = 0,$

$T_{CB} = 40 \text{ N}$

$\vec{k} \therefore M_{a,z} = 0$

Substituindo na expressão \vec{i} :

$M_{a,x} - 480 + 6 \cdot 40 = 0$

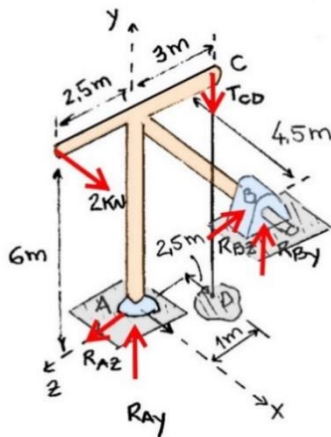
$M_{a,x} = 240 \text{ N.m}$

A somatória dos momentos em torno do ponto B pode ser aplicada para a verificação das reações encontradas.

Exemplo 3.8

[Meriam 7ª ed.
Exemplo 3.7]

Considere uma estrutura suportada por uma junta esférica em A, por um cabo CD no ponto D e um mancal sem atrito no eixo x no ponto B (desconsidere os momentos em B). Determine a tração no cabo e as reações A.



Variáveis:

$$\vec{T}_{CD} = T_{CD} \cdot \vec{u}_{CD}$$

$$\vec{u}_{CD} = \frac{\vec{r}_{CD}}{|\vec{r}_{CD}|}$$

$$\vec{u}_{CD} = \frac{2,5\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}}{6,8}$$

$$\vec{T}_{CD} = \frac{T_{CD} \cdot 2,5}{6,8} \vec{i} - \frac{T_{CD} \cdot 6}{6,8} \vec{j} + \frac{T_{CD} \cdot 2}{6,8} \vec{k}$$

→ Abordagem escalar:

$$(1) \searrow^+ \sum F_x = 0 \therefore R_{Ax} + 2 + \frac{T_{CD} \cdot 2,5}{6,8} = 0$$

$$(2) \uparrow \sum F_y = 0 \therefore R_{Ay} - \frac{T_{CD} \cdot 6}{6,8} + R_{By} = 0$$

$$(3) \swarrow^+ \sum F_z = 0 \therefore R_{Az} = \frac{T_{CD} \cdot 2}{6,8} - R_{Bz} = 0$$

$$(4) \sum M_{A,x} = 0 \therefore \frac{T_{CD} \cdot 2}{6,8} \cdot 6 - \frac{T_{CD} \cdot 6}{6,8} \cdot 3 - R_{Bz} \cdot 6 = 0$$

$$(5) \sum M_{A,y} = 0 \therefore (2) \cdot 2,5 + R_{Bz} \cdot 4,5 - \frac{T_{CD} \cdot 2,5}{6,8} \cdot 3 = 0$$

(4) e (5) $T_{CD} = 2,83 \text{ kN}$

$$R_{Bz} = -0,417 \text{ kN}$$

(1) $R_{Ax} = -3,04 \text{ kN}$

(3) $R_{Az} = -1,25 \text{ kN}$

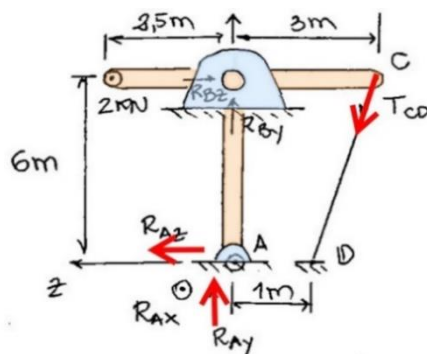
$$(6) \sum M_{A,z} = 0 \therefore -2 \cdot 6 - \overbrace{\frac{T_{CD} \cdot 2,5}{6,8}}^{T_{CD} \cdot x} \cdot 6 + R_{By} \cdot 4,5 = 0$$

Observe que $T_{CD} \cdot y = \left[\frac{-6 \cdot T_{CD}}{6,8} \right] \hat{j}$ não gera momento aqui pois passa pelo eixo z.

(6) $\therefore R_{By} = 4,05 \text{ kN}$

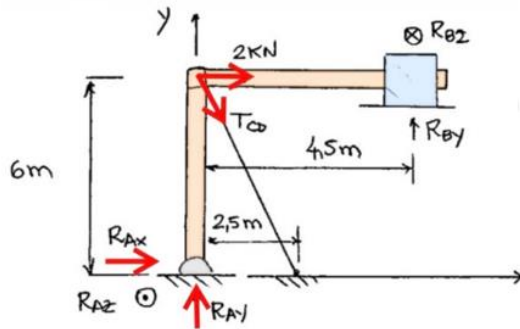
(2) $\therefore R_{Ay} = -1,56 \text{ kN}$

→ Vista plano (y,z)



Vista auxiliar para os momentos em torno de x

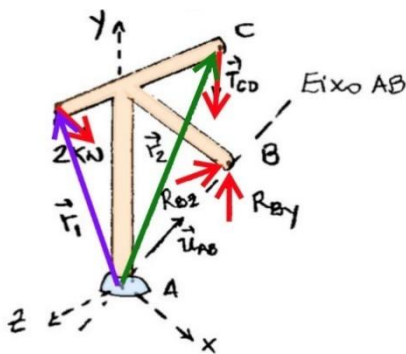
→ Vista plano (y,x)



Vista auxiliar para os momentos em torno de z

→ Abordagem vetorial

Podemos determinar o momento de \vec{T}_{CD} em relação ao eixo que passa por A e B. Desta forma, teremos apenas T_{CD} como incognita.



$$\sum \vec{M}_{AB} = 0$$

$\vec{F} = 2 \text{ kN}$ e \vec{T}_{CD} exercem momento

$$\vec{u}_{AB} = \frac{\vec{r}_{AB}}{|\vec{r}_{AB}|} = \frac{4,5\vec{i} + 6\vec{j}}{7,5}$$

$$\vec{u}_{AB} = 0,6 \vec{i} + 0,8 \vec{j}$$

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= 6 \vec{j} + 2,5 \vec{k} \\ \vec{r}_2 &= 6 \vec{j} - 3 \vec{k} \end{aligned}$$

$$M_{C,AB} = (\vec{r}_2 \times \vec{T}_{CD}) \cdot \vec{u}_{AB}$$

$$M_{2,AB} = (\vec{r}_1 \times 2\vec{i}) \cdot \vec{u}_{AB}$$

$$\sum M_{A,B} = \begin{vmatrix} u_{AB,x} & u_{AB,y} & u_{AB,z} \\ r_{2,x} & r_{2,y} & r_{2,z} \\ T_{CD,x} & T_{CD,y} & T_{CD,z} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_{AB,x} & u_{AB,y} & u_{AB,z} \\ r_{1,x} & r_{1,y} & r_{1,z} \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0,6 & 0,8 & 0 \\ 0 & 6 & -3 \\ \frac{T_{CD} \cdot 2,5}{6,8} & -\frac{T_{CD} \cdot 6}{6,8} & \frac{T_{CD} \cdot 2}{6,8} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0,6 & 0,8 & 0 \\ 0 & 6 & 2,5 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\left[0,6 \cdot 6 \cdot \left(\frac{2 \cdot T_{CD}}{6,8} \right) - 0,8 \cdot 3 \cdot \frac{2,5 \cdot T_{CD}}{6,8} - 3 \cdot 0,6 \cdot \left(\frac{6 \cdot T_{CD}}{6,8} \right) \right] + 0,8 \cdot 2,5 \cdot 2 = 0 \quad T_{CD} = 2,83 \text{ kN}$$

Agora podemos aplicar as equações de equilíbrio 3D para determinarmos as reações em A e em B.

$$[\vec{r}_1 \times 2\vec{i}] + [\vec{r}_2 \times \vec{T}_{CD}] + [\vec{r}_{AB} \times \vec{R}_B] = \vec{0}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 6 & 2,5 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 6 & -3 \\ \frac{2,5}{6,8} \cdot T_{CD} & \frac{-6}{6,8} \cdot T_{CD} & \frac{2}{6,8} \cdot T_{CD} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4,5 & 6 & 0 \\ 0 & R_{By} & -R_{Bz} \end{vmatrix} = 0$$

$$[5\vec{j} - 12\vec{j}] + [\frac{12}{6,8} \cdot T_{CD} \vec{i} - \frac{7,5}{6,8} \cdot T_{CD} \vec{j} - \frac{15}{6,8} \cdot T_{CD} \vec{k} - \frac{18}{6,8} \cdot T_{CD} \vec{i}] +$$

$$+ [-6R_{Bz} \vec{i} + 4,5R_{By} \vec{k} + 4,5R_{Bz} \vec{j}] = \vec{0}$$

$$\vec{i} \therefore \frac{12}{6,8} \cdot T_{CD} - \frac{18}{6,8} \cdot T_{CD} - 6R_{Bz} = 0$$

$$\vec{j} \therefore -\frac{7,5}{6,8} \cdot T_{CD} + 5 + 4,5R_{Bz} = 0$$

$$R_{Bz} = -0,417 \text{ kN}$$

$$\vec{k} \therefore -12 - \frac{15}{6,8} \cdot T_{CD} + 4,5R_{By} = 0$$

$$R_{By} = 4,05 \text{ kN}$$

4 Análise de estruturas

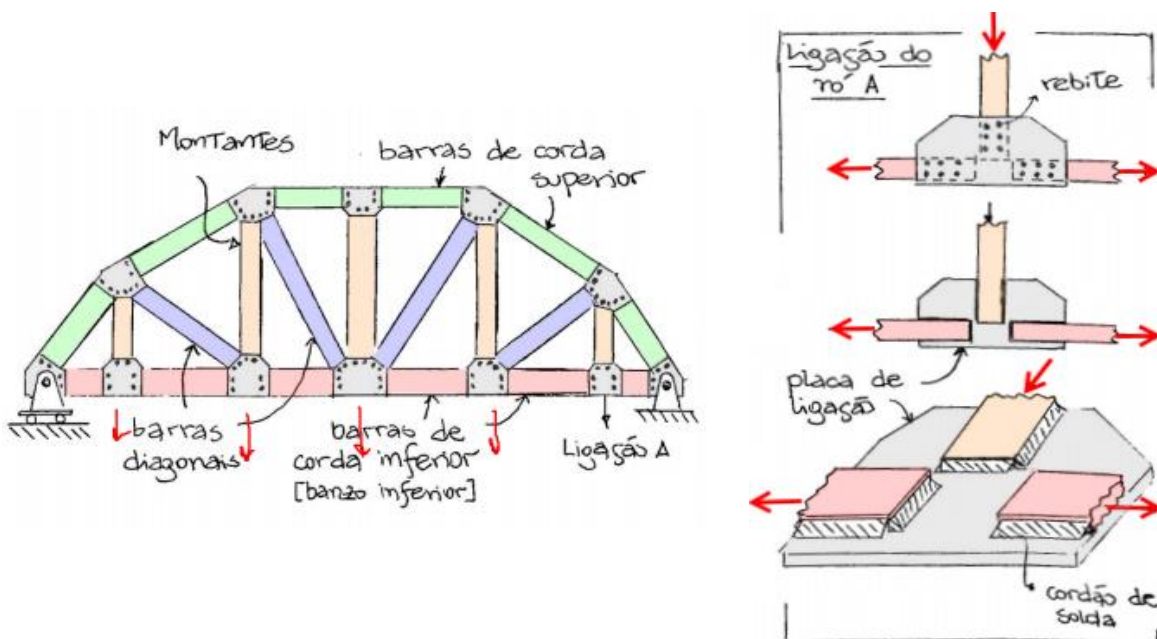
4.1 Análise de Treliças Estaticamente Determinadas

Treliça é uma estrutura reticulada - constituída por barras ou elementos retilíneos – conectados por juntas ou nós localizados nas extremidades de cada elemento. Os elementos construtivos normalmente são:

- Barras de madeira
- Barras de metal
- Dispositivos de ligação

As junções ou ligações entre os membros são usualmente formadas por:

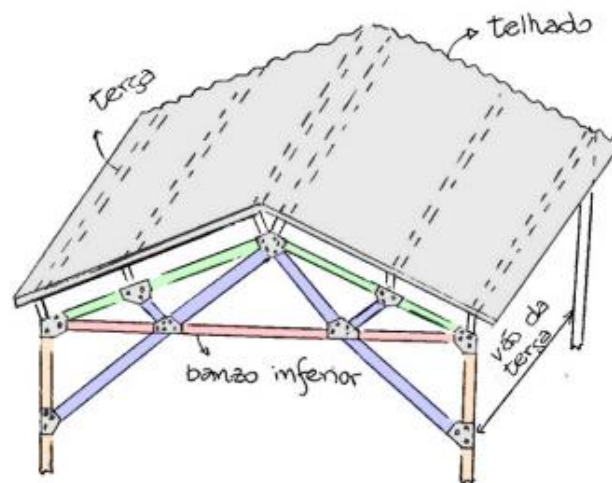
- Rebites ou soldagem das extremidades dos membros em placas de ligação (Gusset Plate)
- Ou simplesmente através de parafusos ou pinos conectados diretamente nas extremidades dos membros.



Treliças de cobertura/Telhado

Normalmente utilizadas como parte de estruturas de construções industriais: galpões, hangares, etc.

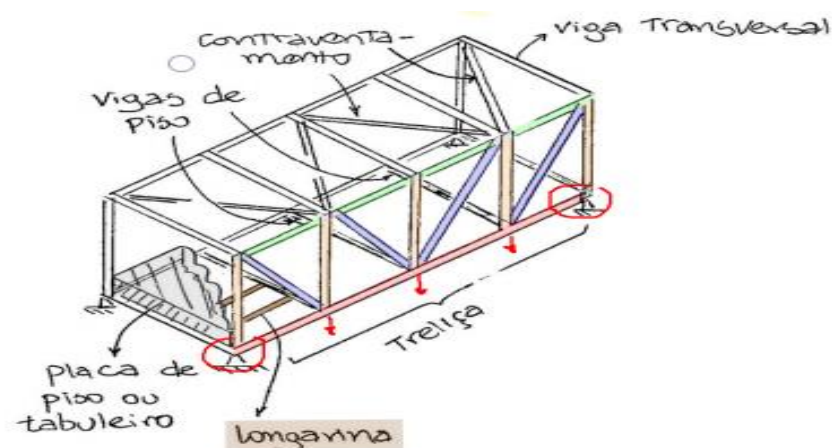
O carregamento do telhado é transmitido à treliça através das ligações com as terças. A força transmitida engloba cargas permanentes e cargas acidentais ou variáveis como vento, sismo, neve, sobre cargas adicionais – estimadas por norma.



Embora a maior parte das treliças possam ser analisadas como treliças planas (em 2 dimensões), existem sistemas como torres de transmissão e cúpulas (dome) treliças que não podem ser tratados como problemas planos, devido à forma, arranjo dos membros e aplicação de carregamentos.

Treliças de Ponte

Em pontes treliçadas, o carregamento principal é transmitido do piso ou tabuleiro para as longarinas, que transmitem para as vigas de piso e, finalmente, para as treliças através das placas de ligações. Embora as treliças sejam muito rígidas em seu próprio plano, são muito flexíveis fora dele e precisam ser reforçadas ou contraventadas para terem estabilidade. Como são normalmente utilizadas em pares ou espaçadas lado a lado, é possível conectar várias treliças para formar uma estrutura tipo caixa rígida.



Análise de Treliças

Uma treliça está completamente analisada quando a magnitude e o comportamento (tração ou compressão) de todas as forças das barras e reações são determinadas.

- Cálculo das reações: aplica-se as equações de equilíbrio para a estrutura inteira como corpo rígido;
- Cálculo das forças internas das barras: é baseada em 3 suposições:

→ As barras são retas e só transmitem carga axial:

Essa suposição também implica que desprezamos o peso da própria barra. Se o peso for significativo, podemos aproximar seu efeito aplicando metade dele como uma carga concentrada nos nós em cada extremidade da barra.

→ Os membros são conectados nos nós por pinos sem atrito:

Isto é, nenhum pode ser transferido entre a extremidade de uma barra e o nó no qual ela se conecta.

→ As cargas são aplicadas somente entre os nós.

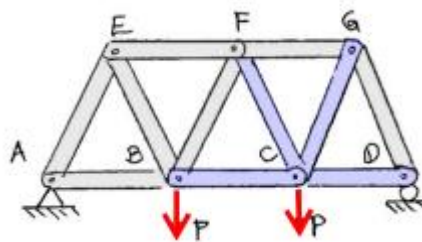


Diagrama de corpo livre da estrutura inteira:

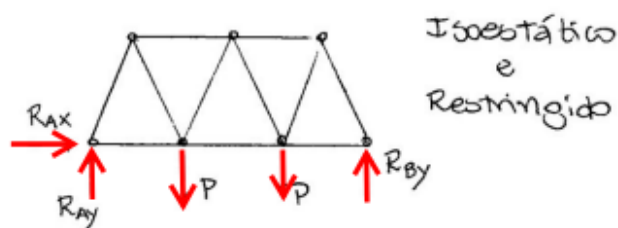
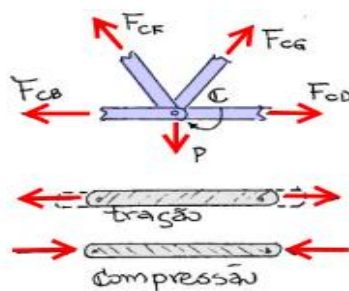


Diagrama de corpo livre do nó ou junta "C":



As barras podem estar sob tração ou sob compressão. Se a barra está sob tração, as forças axiais nas suas extremidades atuam para fora e tendem a alongar a barra. Caso esteja sob compressão, as forças atuam para dentro e comprimem a barra.

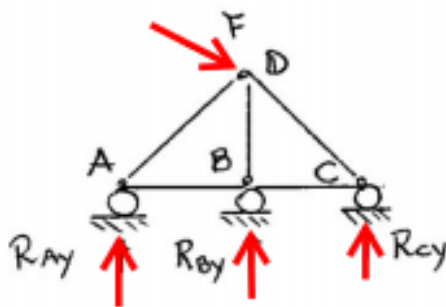
Estaticidade de Trelças

Uma treliça, assim como qualquer estrutura, pode ser hipoestática, isoestática ou hiperestática. As incógnitas para a determinação da estaticidade são:

- η_r = número de reações de apoio
- η_b = número de barras (número de esforços internos a determinar)
- η_n = número de nós ou juntas

Compara-se $(\eta_r + \eta_b)$ com $2.n$ onde $(\eta_r + \eta_b)$ está associado ao número de incógnitas e $(2.n)$ ao número total de equações de equilíbrio para todos os nós (incluindo os nós de apoios). Observe que cada nó nos dá 2 equações de equilíbrio translacional: $+\rightarrow \sum F_x = 0$ e $+\uparrow \sum F_y = 0$ para problemas planos. Podemos ter três casos:

- $\eta_r + \eta_b < 2.n$ - Treliça hipoestática*: instável.
- $\eta_r + \eta_b = 2.n$ - Treliça isoestática**
- $\eta_r + \eta_b > 2.n$ - Treliça hiperestática**



Observe neste caso que $\eta_r = 3$, $\eta_b = 5$ e $\eta_n = 4$. No entanto, como esta estrutura possui nós deslocáveis, é uma treliça hipoestática.

*Ou condição não restringida, com nós deslocáveis.

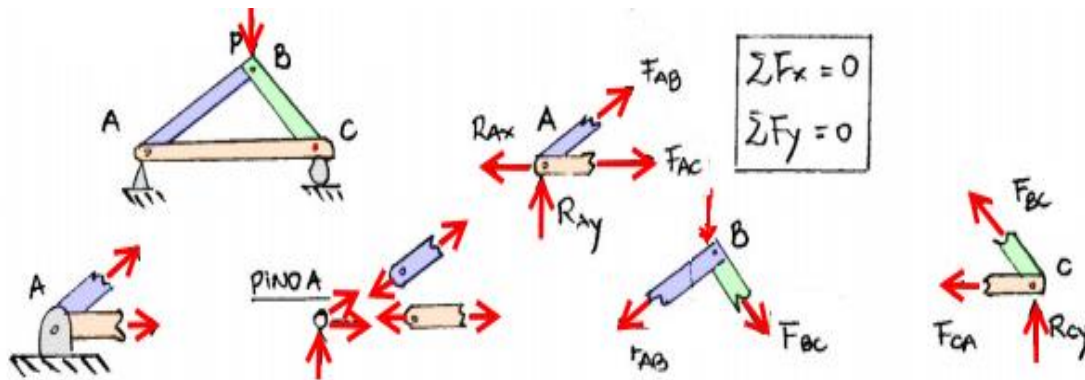
** Caso esteja em equilíbrio estável – restringida, com nós ind deslocáveis.

→ Métodos de obtenção de Esforços Internos para Trelças

- Método dos Nós
- Método das Seções (Ritter)
- Método de Cremona (não veremos)
- Métodos Numéricos (Método dos Elementos Finitos)

4.2 Método dos nós

Uma vez que a treliça está em equilíbrio estático, as equações de equilíbrio ($\sum \vec{F} = 0$ e $\sum \vec{M} = 0$) devem ser válidas para a treliça interna e para qualquer nó separadamente.



Notem que a convenção do sentido de uma dada força de ser mantida em uma mesma barra (i.e F_{AB} é tração no ponto A e B).

Casos especiais

Consequência das condições de equilíbrio.

→ Nó que interliga 4 barras, com duas retas que se interceptam:



→ Nó que interliga 3 barras e suporta uma carga P na direção de uma das barras:



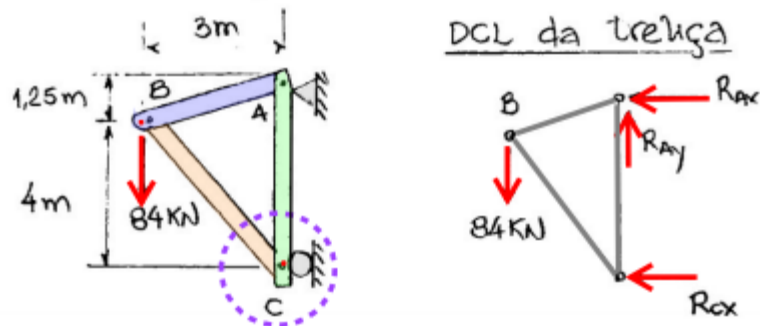
→ Barra de força zero:



Exemplo 4.1

[Beer 13ª ed. Pg. 61]

Determine as forças internas em cada membro da treliça.



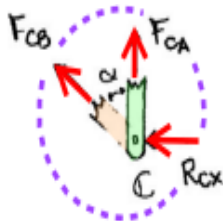
→ Cálculo das reações nos apoios:

$$\rightarrow^+ \sum F_x = 0 \quad \therefore -R_{Ax} - R_{Cx} = 0 \quad \therefore \boxed{R_{Ax} = -48 \text{ kN}}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad \therefore -84 - R_{Ay} = 0 \quad \therefore \boxed{R_{Ay} = 84 \text{ kN}}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \quad \therefore 84 \cdot 3 - R_{Cx} \cdot (4 + 1,25) = 0 \quad \therefore \boxed{R_{Cx} = 48 \text{ kN}}$$

→ Balanço no nó C



$$\tan \alpha = -\frac{3}{4} \quad \alpha = 36,87^\circ$$

$$\rightarrow^+ \sum F_x = 0 \quad \therefore -\sin \alpha \cdot F_{CB} - R_{Cx} = 0$$

$$F_{CB} = \frac{-R_{Cx}}{\sin \alpha} \quad \boxed{F_{CB} = -80}$$

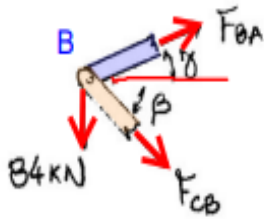
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad \therefore \cos \alpha \cdot F_{CB} + F_{CA} = 0$$

$$F_{CA} = -\cos \alpha \cdot F_{CB}$$

$$\boxed{F_{CA} = 64 \text{ kN}}$$

Para determinarmos a força interna na barra BA, podemos realizar o balanço na junção B ou A.

→ Balanço no nó B



$$\beta = 180^\circ - 36,9^\circ - 90^\circ = 53,13^\circ$$

$$\gamma = \left(\frac{1,25}{3}\right) \quad \gamma = 22,62^\circ$$

$$\rightarrow^+ \sum F_x = 0 \quad \therefore \cos \beta \cdot F_{CB} + \cos \gamma \cdot F_{BA} = 0$$

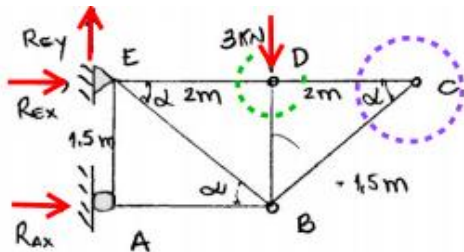
$$F_{AB} = -F_{CB} \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \gamma}$$

$$F_{AB} = 52 \text{ kN}$$

Exemplo 4.2

[F6 – 5Hibbeler 13ª ed.]

Determine as forças axiais de cada membro da treliça pelo método dos nós.



$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$R_{Ey} - 3 = 0 \quad \therefore$$

$$R_{Ey} = 4 \text{ kN}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_E = 0 \quad \therefore R_{Ax} \cdot 1,5 - 3,2 = 0$$

$$R_{Ax} = 4 \text{ kN}$$

Para conferir: $+\circlearrowleft \sum M_A = 0$

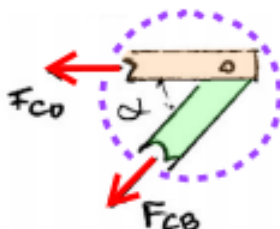
$$-3,2 - 1,5R_{Ex} = 0$$

$$R_{Ex} = -4 \text{ kN}$$

$$\rightarrow^+ \sum F_x = 0 \quad \therefore R_{Ex} + R_{Ax} = 0$$

$$R_{Ex} = -4 \text{ kN}$$

→ Balanço nó C



$$\rightarrow^+ \sum F_x = 0$$

$$-F_{CD} - \cos \alpha \cdot F_{CB} = 0 \quad \therefore$$

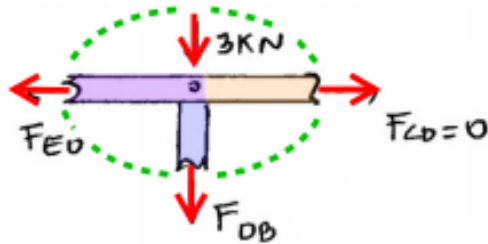
$$F_{CD} = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad \therefore -\sin \alpha \cdot F_{CB} = 0$$

$$F_{CB} = 0$$

$$\alpha = \text{tg}^{-1}\left(\frac{1,5}{2}\right) = 36,87^\circ$$

→ Balanço no nó D



$$F_{CD} = 0$$

$$F_{OD} = -3 \text{ kN}$$

ou

$$F_{DB} = 3 \text{ kN (c)}$$

→ Balanço no nó A

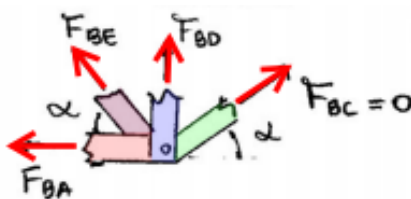


$$+\uparrow \sum F_y = 0 \therefore F_{AE} = 0$$

$$\rightarrow^+ \sum F_x = 0 \therefore F_{AB} = -R_{AX} \rightarrow F_{AB} = -4 \text{ kN}$$

$$F_{AB} = 4 \text{ kN (compressão)}$$

→ Balanço no nó B



$$\rightarrow^+ \sum F_x = 0$$

$$\cos \alpha \cdot F_{BC} - F_{BA} - \cos \alpha \cdot F_{BE} = 0$$

$$F_{BE} = \frac{-F_{BA}}{\cos \alpha} = \frac{-(-4)}{\cos(36,97^\circ)}$$

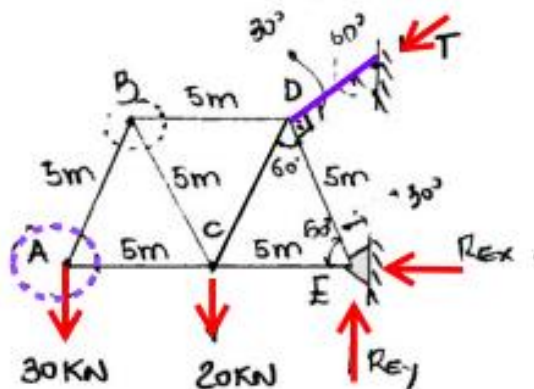
$$F_{BE} = 5 \text{ kN (tração)}$$

Exemplo 4.3

[Meriam 7ª ed.
Exemplo 4.1]

Determine a força axial em cada membro da treliça pelo método dos nós.

Primeiramente, desenhemos o DCL da treliça e determinemos as reações nos apoios através das condições de equilíbrio.



$$\rightarrow^+ \sum F_x = 0$$

$$\therefore R_{EX} + \cos 30^\circ \cdot T = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

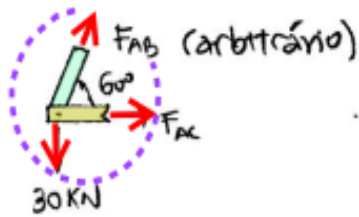
$$\therefore -30 - 20 + R_{EY} + 30^\circ \cdot T = 0$$

$$+\circlearrowleft \sum M_E = 0$$

$$\therefore 30 \cdot 10 + 20 \cdot 5 - 5T = 0$$

$$T = 80 \text{ kN}$$

→ Balanço no nó A



Substituindo (T) em (1) ∴ $R_{EX} = 59,28 \text{ kN}$

Substituindo (T) em (2) ∴ $R_{EY} = 10 \text{ kN}$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \therefore -30 + \sin 60^\circ \cdot F_{AB} = 0$$

$$F_{AB} = 34,64 \text{ kN}$$

$$\rightarrow^+ \sum F_x = 0 \therefore + \cos 60^\circ \cdot F_{AB} + F_{AC} = 0$$

$$F_{AC} = -\cos 60^\circ \cdot 34,64$$

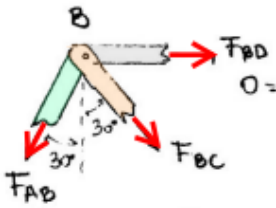
$$F_{AC} = 17,32 \text{ kN}$$

→ Balanço no nó B (não há força externa)

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$0 = -\cos 30^\circ \cdot F_{AB} - \cos 30^\circ \cdot F_{BC} = 0$$

$$F_{BC} = -34,64 \text{ kN}$$



$$\rightarrow^+ \sum F_x = 0$$

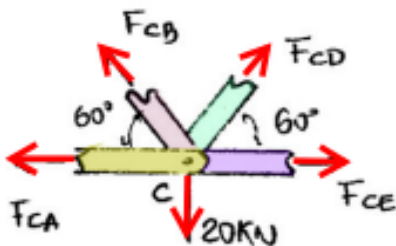
$$-\sin 30^\circ \cdot F_{AB} + \sin 30^\circ \cdot F_{BC} + F_{BD} = 0$$

$$F_{BD} = 34,64 \text{ kN}$$

→ Balanço no nó C

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$\sin 60^\circ \cdot F_{CB} + \sin 60^\circ \cdot F_{CD} - 20 = 0$$



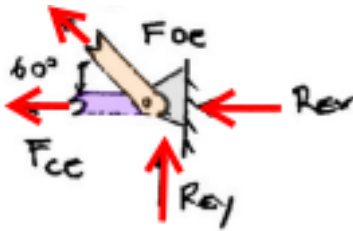
$$F_{CD} = \frac{20 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (-34,64)}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$F_{CO} = 57,73 \text{ kN}$$

$$\begin{aligned}\rightarrow^+ \sum F_x &= 0 \\ -F_{CA} - \cos 60^\circ \cdot F_{CB} + \cos 60^\circ \cdot F_{CD} + F_{CE} &= 0\end{aligned}$$

$$F_{CE} = -63,51 \text{ kN}$$

→ Balanço no nó E



$$+\uparrow \sum F_y = 0 \therefore R_{EY} + \sin 60^\circ \cdot F_{DE} = 0$$

$$F_{DE} = \frac{-R_{EY}}{\sin 60^\circ}$$

$$F_{DE} = -11,55 \text{ kN}$$

4.3 Método das seções

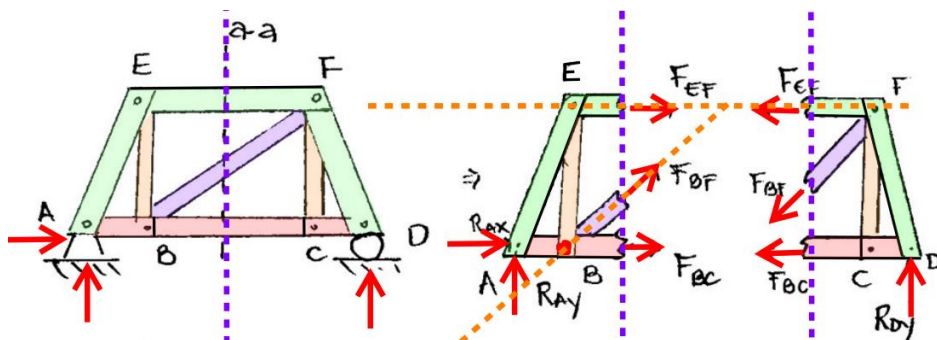
[Hib. 13ª ed. Pg. 304
Beer 13ª ed. Pg. 280
Mer. 13ª ed. Pg. 188]

O método dos nós é mais eficiente quando as forças internas em todos os membros devem ser calculadas.

Caso apenas uma ou poucas barras necessitem ser analisadas, ou quando as direções são oblíquas e o número de barras por conexão é muito alto, o método das seções se torna mais eficiente.

Este método é baseado no princípio que tanto a treliça como um todo está em equilíbrio estático (não translada nem rotacional), quanto qualquer porção da mesma.

Por exemplo, nesta treliça, para determinarmos F_{BF} , deveríamos realizar pelo menos três balanços de nós.



Pelo método das seções podemos traçar a seção passando pela barra que estamos interessados e aplicar as condições de equilíbrio $\sum \vec{F} = 0$ e $\sum \vec{M} = 0$ no corpo segmentado.

- A somatória dos momentos em torno do ponto B leva a determinação direta de F_{EF} .
- A soma das forças verticais permite a determinação direta de F_{BF}

Mostre como calcular diretamente:

$$F_{BF} \rightarrow +\circlearrowleft \sum M_E$$

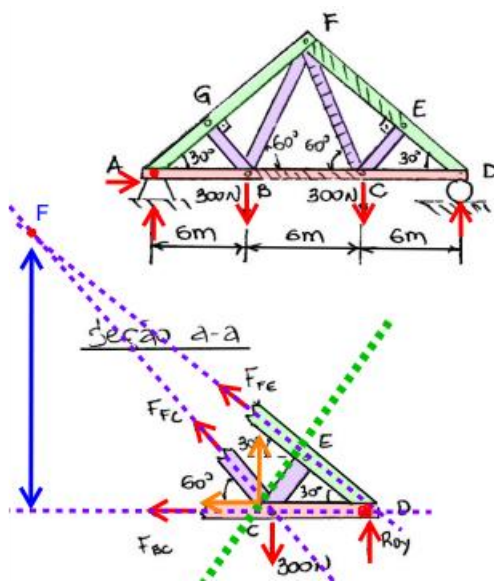
$$F_{BF} \rightarrow +\uparrow \sum F_y$$

$$F_{BC} \rightarrow +\circlearrowleft \sum M_F$$

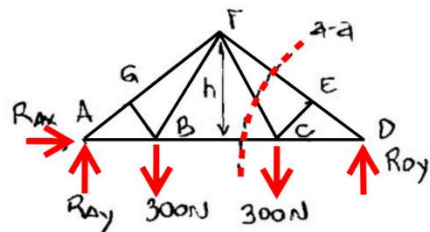
Exemplo 4.4

[F6 – 10, Hib. 13ª ed.]

Determine as forças nos membros EF, CF e BC



Cálculo das reações



$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0$$

$$-300 \cdot 6 - 300 \cdot 12 + R_{DY} \cdot 18 = 0$$

$$R_{DY} = 300 \text{ N}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-300 - 300 + R_{AY} + R_{DY} = 0$$

$$R_{AY} = 300 \text{ N}$$

Poderíamos ter chegado na mesma conclusão por causa da simetria carregamento/geometria.

→ Seção a-a

$$+\circlearrowleft \sum M_C = 0$$

$$R_{DY} \cdot 6 + F_{FE} \cdot (\sin 30^\circ \cdot 6) = 0$$

$$F_{FE} = -600 \text{ N OU } F_{FE} = 600 \text{ N (C)}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$\sin(60^\circ) \cdot F_{FC} + \sin 30^\circ \cdot F_{FE} - 300 + R_{OY} = 0$$

$$F_{FC} = 346,41 \text{ N (T)}$$

$$F_{BC} = 346,41 \text{ N (T)}$$

$$+\zeta \sum M_D = 0$$

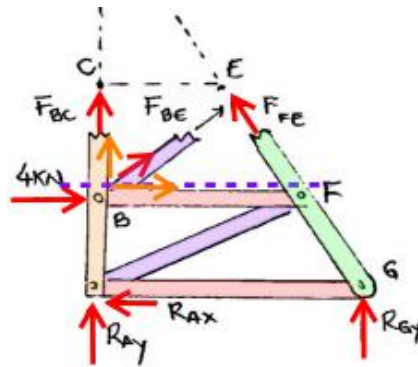
$$F_{BC} = 346,41 \text{ N (T)}$$

$$F_{BC} = 346,41 \text{ N (T)}$$

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \frac{2}{b} \therefore b = 1 \text{ m} \\ \tan \beta &= \frac{2}{b} \therefore \beta = 63,4^\circ\end{aligned}$$

→ Seção a-a

Devemos buscar equações de equilíbrio que cancelem o maior número possível de incógnitas. Duas opções onde temos uma equação e apenas uma variável são:



→ Opção 1

$$(+\cup \sum M_B = 0 \rightarrow F_{FE})$$

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \therefore F_{FE,y} \cdot 2 - R_{AX} \cdot 2 + R_{Gy} - 3 = 0$$

$$(\sin \alpha \cdot F_{FE}) \cdot 2 - 15 \cdot 2 + 21,33 \cdot 3 = 0$$

$$F_{BE} = -19 \text{ kN}$$

$$\rightarrow^+ \sum F_x = 0 \therefore -R_{AX} + 4 + \cos \beta \cdot F_{BE} - \cos \alpha \cdot F_{FE} = 0$$

$$F_{BE} = 5,6 \text{ kN (T)}$$

→ Opção 2

$$(+\cup \sum M_D = 0 \rightarrow F_{BC})$$

$$+\circlearrowleft \sum M_D = 0 \therefore 4 \cdot 4 - R_{AX} \cdot 6 + R_{Ey} \cdot 3 + F_{BE,y} \cdot 0 + F_{BE,x} \cdot 4 = 0$$

$$16 - 15 \cdot 6 + 21,33 \cdot 3 + (\cos \beta \cdot F_{BE}) \cdot 4 = 0$$

$$F_{BE} = 5,6 \text{ kN (T)}$$

→ Caso fosse necessário

$$(+\cup \sum M_E = 0 \rightarrow F_{BC})$$

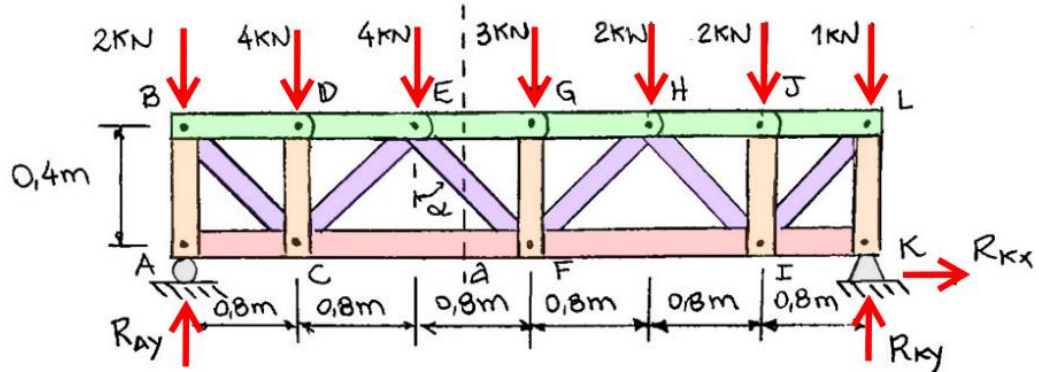
$$+\circlearrowleft \sum M_E = 0 \therefore -F_{BC} \cdot 1 - R_{Ay} \cdot 1 + R_{Gy} \cdot 2 = 0$$

$$F_{BC} = 27,66 \text{ kN}$$

Exemplo 4.6

[Beer 9ª ed. Pg. 47]

Determine as forças nos membros CF, EF e EG.



→ Cálculo das reações

$$+\circlearrowleft \sum M_K = 0$$

$$2 \cdot 0,8 + 2 \cdot 1,6 + 3 \cdot (2,4) + 4 \cdot (3,2) + 4 \cdot (4,0) + 2 \cdot (4,8) - R_{Ay} \cdot (4,8) = 0$$

$$R_{Ay} = 10,5 \text{ kN}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0$$

$$-4 \cdot (0,8) - 4 \cdot (1,6) - 3 \cdot (2,4) - 2 \cdot (3,2) - 2 \cdot (4,0) - 1 \cdot (4,8) + R_{Ky} \cdot (4,8) = 0$$

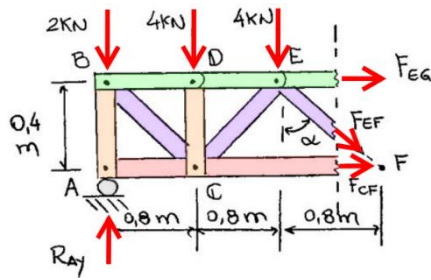
$$R_{Ky} = 7,5 \text{ kN}$$

→ Verificando as reações: $+\circlearrowleft \sum F_y = 0$

$$-2 - 4 - 4 - 3 - 2 - 2 - 1 + R_{Ay} + R_{Ky} = 0$$

$$R_{Ay} + R_{Ky} = 18 \text{ kN}$$

→ Seção a-a



$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{0,8}{0,4}\right)$$

$$\alpha = 63,43^\circ$$

$$+\circlearrowleft \sum M_E = 0 \therefore F_{CF} \cdot (0,4) + 4 \cdot (0,8) + 2 \cdot (1,6) - R_{Ay} \cdot (1,6) = 0$$

$$F_{CF} = 26 \text{ kN}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_F = 0 \therefore -F_{EG} \cdot (0,4) + 4 \cdot (0,8) + 4 \cdot (1,6) + 2 \cdot (2,4) - R_{Ay} \cdot (2,4) = 0$$

$$F_{CF} = -27 \text{ kN}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \therefore R_{Ay} - 2 - 4 - 4 - \cos \alpha \cdot F_{EF} = 0$$

$$F_{EF} = \frac{10,5 - 10}{\cos(63,43^\circ)}$$

$$F_{EF} = 1,12 \text{ kN}$$

→ Verificação:

$$\begin{aligned} \rightarrow^+ \sum F_x = 0 \therefore F_{EG} + \sin \alpha \cdot F_{EF} + F_{CF} &= 0 \\ -27 + \sin \alpha \cdot 1,12 + 26 &= 0 \\ -27 + 1 + 26 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

4.4 Estruturas e Máquinas

[Meriam 7ª ed. Pg. 204]
[Beer 3ª ed. Pg. 404]

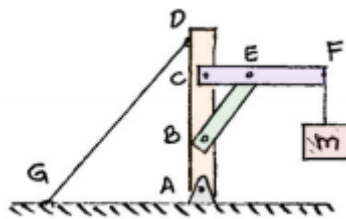
Vimos que uma treliça se caracteriza por um conjunto de barras conectadas por nós nas extremidades de cada elemento e forças aplicadas somente nos nós. Uma estrutura possui pelo menos um membro que suporta mais de uma força.

- Estruturas: São designadas para suportar carregamentos e são normalmente fixas em algumas posições (Meriam, p204).
- Máquinas: São estruturas que contêm partes móveis e são designadas a transmitir forças ou binários. Exemplo: Guindaste.

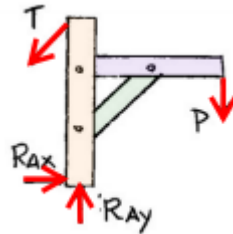
Como nesses dois casos nós temos membros com mais de duas forças, não podemos analisá-los pelos dois métodos vistos em treliças, pois $V(x)$ e $M(x)$ ocorrem.

Já estudamos o equilíbrio de corpos rígidos, onde analisamos um único corpo. Nessa seção, analisaremos um conjunto de corpos rígidos interconectados.

As forças atuando em cada membro são encontradas ao isolar o membro e ao impor as equações de equilíbrio no DCL do mesmo.

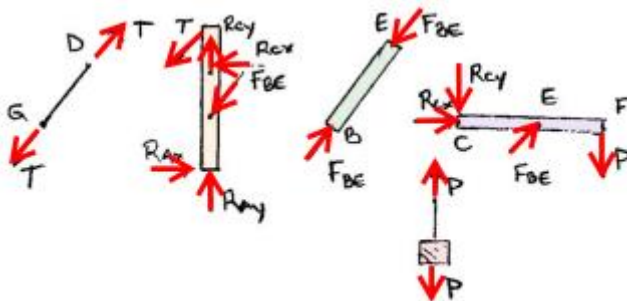


O DCL do guindaste inteiro é:



3 variáveis e 3 equações de equilíbrio no plano, ($\rightarrow +\sum F_x$, $\uparrow +\sum F_y$, $\curvearrowright +\sum M$).

DCL separadamente:



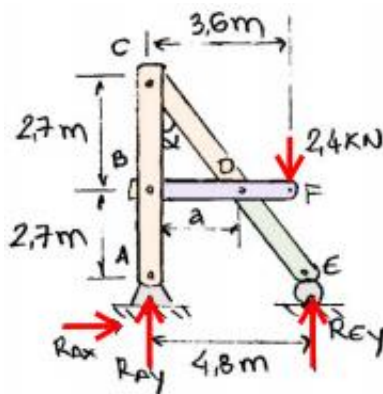
Podemos encontrar todas as forças aplicando as equações de equilíbrio em cada membro.

Exemplo 4.7

[Beer 3ª ed.]
[Exemplo 6.5]

Determine as forças agindo em cada uma das barras

→ Estrutura inteira



$$\curvearrowright +\sum M_A = 0$$

$$-2,4 \cdot 3,6 + R_{EY} \cdot 4,8 = 0$$

$$R_{EY} = 1,8 \text{ kN } (\uparrow)$$

$$\uparrow +\sum F_y = 0$$

$$R_{AY} + R_{EY} - 2,4 = 0$$

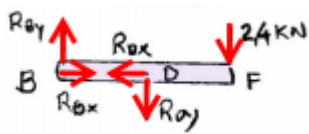
$$R_{AY} = 0,6 \text{ kN } (\uparrow)$$

$$\pm \sum F_x = 0 \therefore$$

$$R_{AX} = 0$$

3 variáveis e 3 equações de equilíbrio!

Barra BF



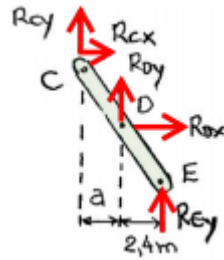
→ Na barra BF

$$\curvearrowright + \sum M_B = 0$$

$$- R_{DY} \cdot 2,4 - 2,4 \cdot 3,6 = 0$$

$$R_{DY} = -3,6 \text{ kN}$$

Barra CE



$$\uparrow + \sum F_y = 0$$

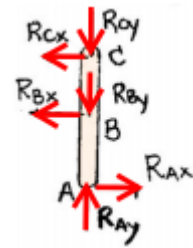
$$R_{BY} - R_{DY} - 2,4 = 0$$

$$R_{BY} = -1,2 \text{ kN}$$

$$\rightarrow + \sum F_x = 0 \quad \therefore R_{BX} - R_{DX} = 0$$

$$R_{BX} = R_{DX} = 0$$

Barra CA



→ Na barra CA

$$\curvearrowright + \sum M_C = 0$$

$$- R_{BX} \cdot 2,7 + R_{AX} \cdot 5,4 = 0$$

$$R_{BX} = 0$$

$$R_{CX} = 0$$

$$\uparrow + \sum F_y = 0$$

$$- R_{CY} - R_{BY} + R_{AY} = 0$$

$$R_{CY} = -(-1,2) + 0,6$$

$$R_{CY} = 1,8 \text{ kN}$$

→ Na barra CE

$$\curvearrowright + \sum M_C = 0$$

$$R_{DY} \cdot a + R_{DX} \cdot 2,7 + R_{EY} \cdot 4,8 = 0$$

$$R_{DY} \cdot 2,4 + 1,8 \cdot 4,8 = 0$$

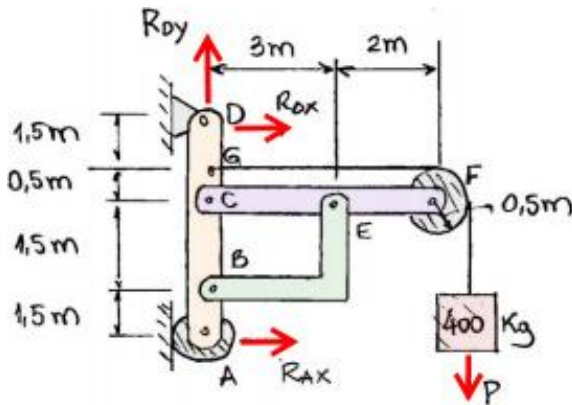
$$R_{DY} = -3,6 \text{ kN}$$

$$R_{CY} = 1,8 \text{ kN}$$

Exemplo 4.8

[Meriam 7ª ed. 4/6]
[Sample Problem]

Calcule as componentes horizontal e vertical de todas as forças de todos os membros



→ Estrutura inteira:

$$\circlearrowleft + \sum M_D = 0 \therefore R_{AX} \cdot 5 - P \cdot 5,5 = 0$$

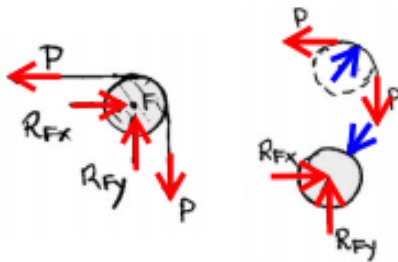
$$R_{AX} = 4316,4 \text{ N}$$

$$\uparrow + \sum F_y = 0 \therefore R_{DY} - P = 0$$

$$R_{DY} = 3924 \text{ N}$$

$$\rightarrow + \sum F_x = 0 \therefore R_{DX} = -4316,4 \text{ N}$$

→ No cabo/polia

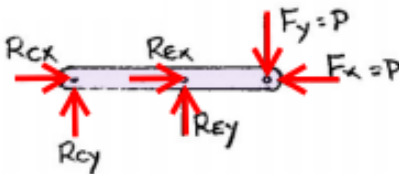


$$R_{FX} = 3924 \text{ N}$$

e

$$R_{FY} = 3924 \text{ N}$$

→ Na barra CF



$$\uparrow + \sum F_y = 0$$

$$R_{CY} + R_{EY} - F_y = 0$$

$$R_{CY} = -2616 \text{ N}$$

$$\circlearrowleft + \sum M_C = 0$$

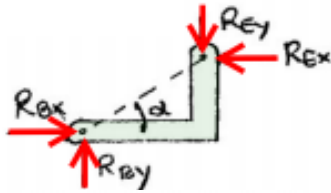
$$R_{EY} \cdot 3 - F_y \cdot 5 = 0$$

$$R_{EY} = 6540 \text{ N}$$

Ainda não é possível determinar R_{CX} e R_{EX} .

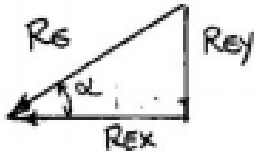
→ Na barra BE

Esta é uma barra especial, com somente duas forças nas extremidades, onde as forças devem se anular. Logo $\vec{R}_E = -\vec{R}_B$



$$\tan \alpha = \frac{R_{Ey}}{R_{Ex}} \quad \therefore \tan \alpha = 6540 \cdot \frac{3}{1,5}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{1,5}{3}$$



$$R_{Ex} = 13080 \text{ N}$$

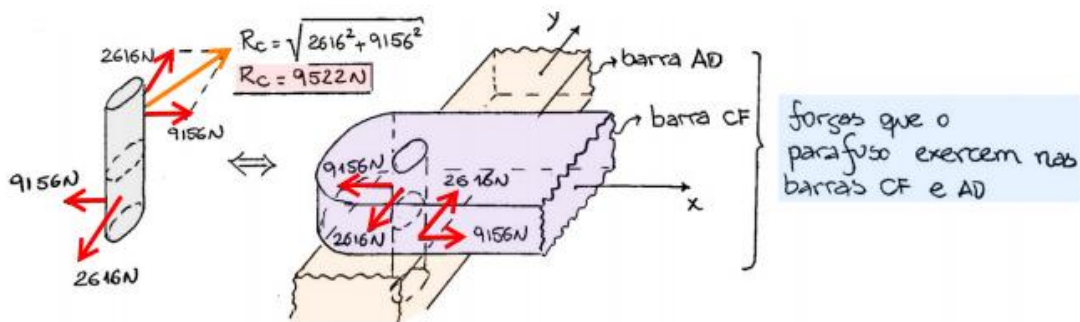
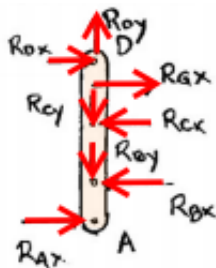
$$R_{Bx} = 13080 \text{ N} \quad R_{By} = 6540 \text{ N}$$

Da barra CF, temos que $R_{Cx} = P - R_{Ex}$

Logo:

$$R_{Cx} = -9156 \text{ N}$$

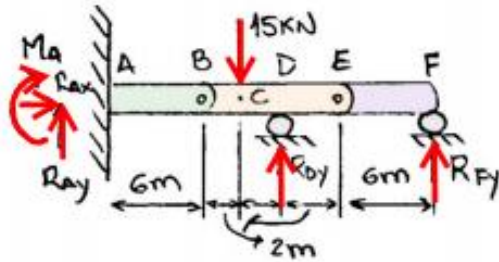
→ Na barra



Exemplo 4.9

[Hibbeler 13ª ed. Pg. 73]

Determine as reações nos suportes



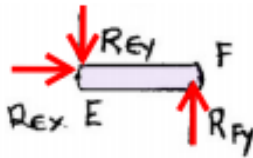
→ Estrutura inteira

$$\curvearrowright + \sum M_A = 0$$

$$-M_A - 15 \cdot 8 + 10 \cdot R_{Dy} + 18 \cdot R_{Fy} = 0$$

$$-(-45) - 15 \cdot 8 + 10 \cdot 7,5 + 18 \cdot 0 = 0$$

$$\therefore 0 = 0$$



→ Na barra EF

$$\curvearrowright + \sum M_E = 0$$

$$R_{Fy} \cdot 6 = 0$$

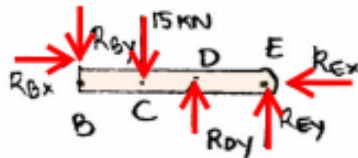
$$R_{Fy} = 0$$

$$\rightarrow + \sum F_x = 0$$

$$R_{Ey} = 0$$

$$\uparrow + \sum F_y = 0$$

$$R_{Ex} = 0$$



→ Na barra BE

$$\curvearrowright + \sum M_B = 0$$

$$R_{Dy} \cdot 4 - 15 \cdot 2 = 0$$

$$R_{Dy} = 7,5 \text{ kN}$$

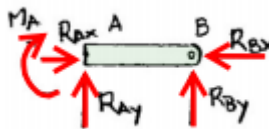
$$\uparrow + \sum F_y = 0$$

$$-R_{By} - 15 + R_{Dy} + R_{Ey} = 0$$

$$R_{By} = -7,5 \text{ kN}$$

$$\rightarrow + \sum F_x = 0$$

$$R_{Bx} = R_{Ex} = 0$$



→ Na barra AB

$$\curvearrowright + \sum M_A = 0$$

$$R_{By} \cdot 6 - M_A = 0$$

$$R_{Ay} = 7,5 \text{ kN}$$

$$\uparrow + \sum F_y = 0$$

$$R_{Ay} + R_{By} = 0$$

$$R_{Ax} = 0$$

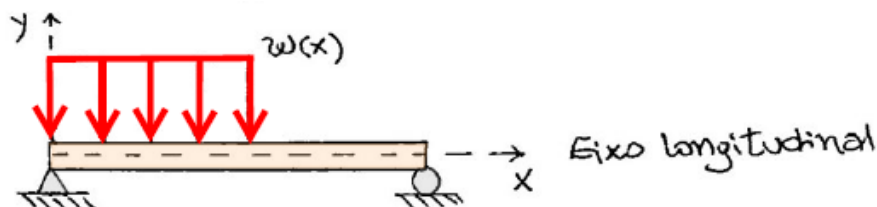
$$\rightarrow + \sum F_x = 0$$

$$M_A = -45 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

5 Diagrama de forças axiais, cortante e de momentos (Hibbeler, Arcanjo)

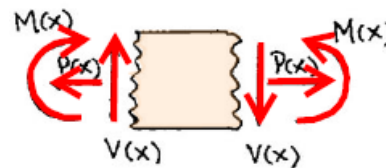
As vigas representam um dos elementos mais comuns encontrados em estruturas.

São elementos projetados para suportar carregamentos transversais ou perpendiculares ao seu eixo longitudinal, mas suportam também cargas axiais.



Três tipos de esforços internos podem ser desenvolvidos:

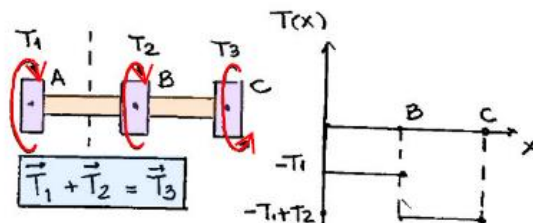
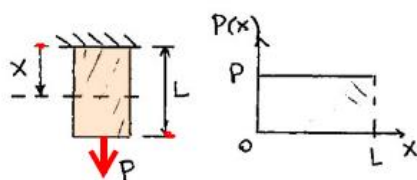
- Esforço ou força cortante $V(x)$.
- Momento fletor $M(x)$.
- Carga axial $P(x)$.



Quando uma viga é carregada perpendicularmente ao seu eixo longitudinal, esforços internos na forma de uma força cortante $V(x)$ e $M(x)$ são desenvolvidos (internamente) na viga e transmitidos aos apoios ou vínculos.

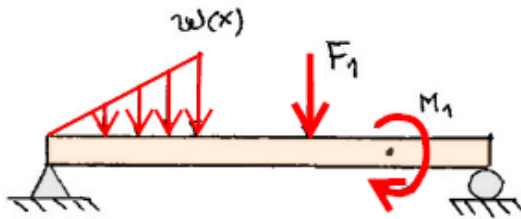
Caso exista alguma parcela de força horizontal (paralela à viga), cargas axiais são desenvolvidas e também transmitidas aos apoios. Se a força axial $P(x)$ é pequena - situação típica para a maioria das vigas -, pode ser desprezada ao se projetar a peça.

Para projetar uma viga (seção/perfil e material), o projetista deve construir os diagramas de esforços internos [$P(x)$, $V(x)$ e $M(x)$] para determinar o local (ao longo de x) e a magnitude dos valores máximos destes esforços.



Existem casos onde é simples observar onde os esforços internos são máximos. No exemplo à esquerda temos uma barra carregada axialmente onde $P(x)$ é constante ao longo de x . À direita, um eixo submetido a torques (momentos concentrados), onde o trecho BC possui um torque interno máximo constante.

No entanto para a maior parte das estruturas, a determinação dos “pontos críticos” ou mais solicitados internamente exige a avaliação das funções os esforços internos.



Nota:

$W(x)$: carregamento distribuído (weight) triangularmente.
 M_1 : momento binário ou momento concentrado.

Neste caso, que apresenta apenas $V(x)$ e $M(x)$, onde os esforços internos são máximos?

Para se responder a esta pergunta devemos construir diagramas ou gráficos com as expressões $P(x)$, $V(x)$ e $M(x)$ ao longo de todo o comprimento L da viga. Assim, podemos encontrar o(s) ponto(s) de máximo(s) ou ponto(s) crítico(s) onde $P_{\text{máx}}$, $V_{\text{máx}}$ e $M_{\text{máx}}$ são desenvolvidos.

Com essas informações, o projetista pode dimensionar a viga, escolhendo um perfil e material adequado, conforme recomendações definidas por norma, ou definir onde a viga deve ser reforçada ou como dimensionar várias seções transversais ao longo de seu comprimento.

Na prática, para a maior parte das vigas, o dimensionamento é dado pela magnitude do máximo momento: $M_{\text{máx}}$. A não ser que:

- Se analise vigas “stubby” (curta e grossa) com relação ao seu comprimento e , ou;
- solicitadas com altas cargas próximas aos apoios.

Nestas situações, o cisalhamento gerado pelo esforço cortante pode ser o fator dominante de projeto.

Existem 2 métodos para a construção dos diagramas:

- Método das seções ou método direto.
 - Baseado nas equações de equilíbrio estático.
- Método do somatório.
 - Baseado nas reações infinitesimais entre os esforços internos e entre $V(x)$ e $W(x)$.

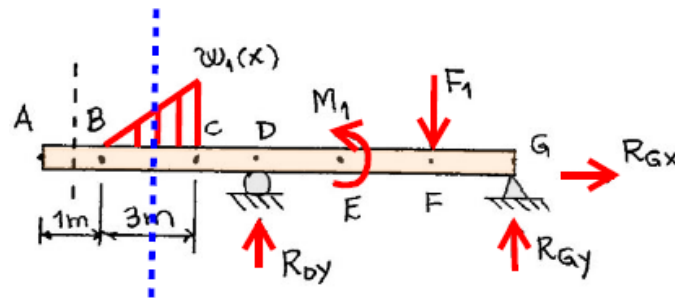
5.1 Método das seções ou método direto

O método das seções consiste na aplicação das equações de equilíbrio no plano (x,y) : $\rightarrow \Sigma F_x = 0$; $\uparrow \Sigma F_y = 0$; $\curvearrowright \Sigma M_{xy} = 0$, para cada seção da viga. As seções de uma viga são caracterizadas por descontinuidades de carregamentos: aplicados ou reativos e extremidade geométrica de um elemento.

Por descontinuidade temos:

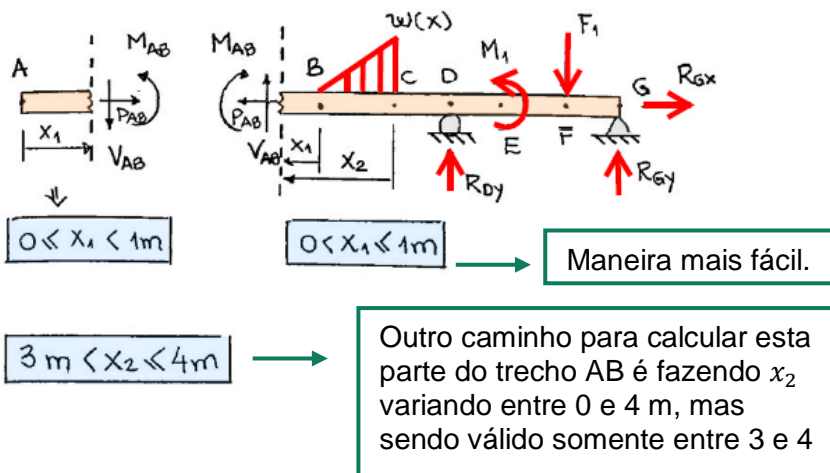
- Início ou término de um carregamento distribuído $W(x)$
- Força concentrada (aplicada/ativa)
- Momento concentrado ou momento binário (aplicado/ativo)
- Força ou momento reativo, devido aos apoios
- Extremidades da geometria ao longo de x

Assim, as funções ou expressões dos esforços internos $P(x)$, $V(x)$ e $M(x)$ devem ser determinadas para cada região ou seção da viga - definidas anteriormente, entre as descontinuidades.



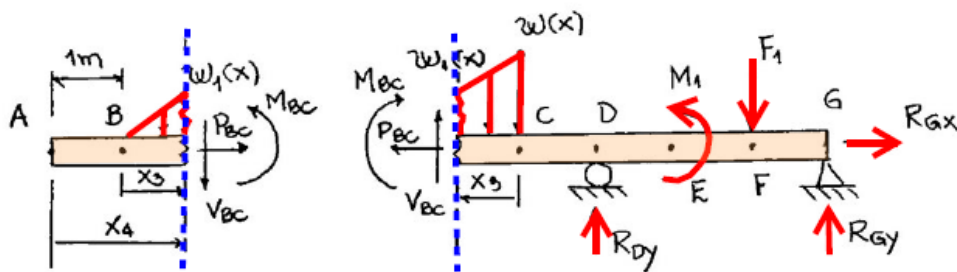
No exemplo acima temos 6 regiões ou seções: AB, BC, CD, DE, EF e FG, onde em cada região os esforços são descritos por funções independentes. Logo, faremos um total de 6 análises.

Para a região AB:



- Fazemos um corte e isolamos ou o lado esquerdo (mais fácil) ou o lado direito da viga.
- A coordenada x_i que descreve a função na seção (entre A e B, ou B e A) é arbitrária.
- Como resultado teremos $P_{AB}(x_1)$, $V_{AB}(x_1)$, $M_{AB}(x_1)$.

Para a região BC:

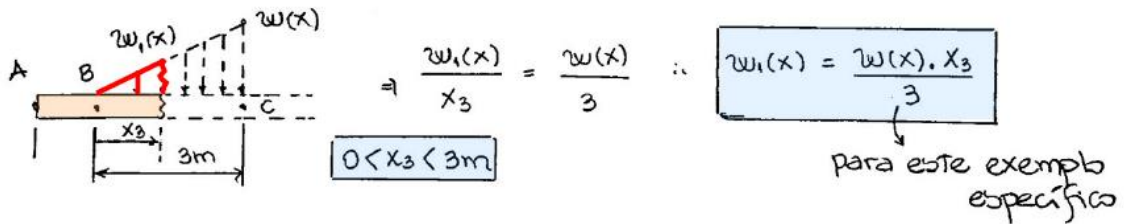


No caso de uma seção contendo um carregamento distribuído triangular, observe que, ao traçar uma seção entre os pontos B e C, o lado esquerdo mantém um carregamento distribuído triangular com altura $w_1(x)$ (menor ou igual a $w(x)$), enquanto o trecho seccionado da direita (mais trabalhoso) mantém um carregamento distribuído trapezoidal.

Se fizermos as análises de ambos os lados, chegamos a expressões $P_{BC}(x)$, $V_{BC}(x)$ e $M_{BC}(x)$ distintas. No entanto estas expressões, quando plotadas nos

diagramas com as coordenadas adequadas (x_3 ou x_4), apresentarão os menores valores.

Observe que $W_1(x)$ pode ser escrito em termos de $W(x)$ e a coordenada que define a seção, x_3 , através de semelhança de triângulos:



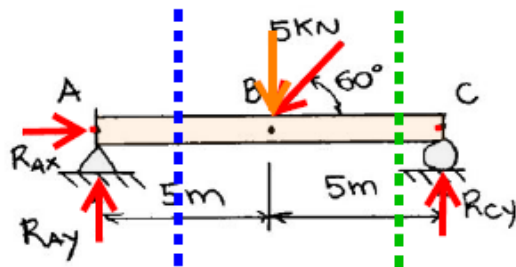
Procedimento de análise:

- Cálculo das reações nos apoios: aplicação das equações de equilíbrio na estrutura completa.
- Definição das seções e aplicação das equações de equilíbrio para cada trecho (esquerdo ou direito): desta forma, encontra-se as funções que descrevem os esforços internos P_i , V_i e M_i para cada seção i .
- Construção dos diagramas $P(x)$, $V(x)$ e $M(x)$.

Exemplo 5.1

[Arcanjo
Exemplo 2.1]

Construa os diagramas de $P(x)$, $V(x)$ e $M(x)$ para a viga sem peso e indique os valores máximos de P , V e M e onde eles ocorrem.



→ Cálculo das reações:

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow -\sin 60^\circ \cdot 5 \cdot (5) + R_{Cy} \cdot (10) = 0$$

$$R_{Cy} = 2,165 \text{ kN}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow R_{Ay} - \sin 60^\circ \cdot 5 + R_{Cy} = 0$$

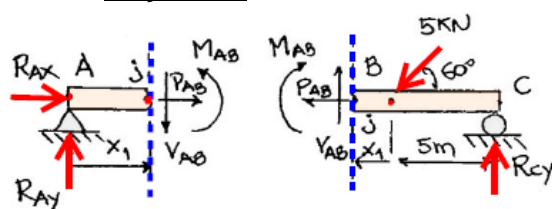
$$R_{Ay} = 2,165 \text{ kN}$$

$$\rightarrow^+ \sum F_x = 0 \Rightarrow R_{Ax} - \cos 60^\circ \cdot 5000 = 0$$

$$R_{Ax} = 2,5 \text{ kN}$$

→ Definição das seções e cálculos dos esforços internos

Seção AB



Lado esquerdo para $0 \leq x_1 \leq 5 \text{ m}$

$$\rightarrow^+ \sum F_x = 0 \Rightarrow P_{AB} + R_{Ax} = 0$$

$$P_{AB} = -2,5 \text{ kN (não varia com } x_1)$$

$$\rightarrow^+ \sum F_y = 0 \therefore R_{AX} - V_{AB} = 0$$

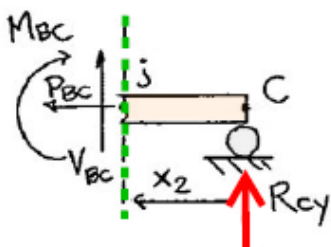
$$V_{AB} = 2,165 \text{ kN (não varia com)}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_j = 0 \therefore -V_{AB} \cdot X_1 + M_{AB} = 0$$

$$M_{AB} = V_{AB} \cdot X_1 = 2,165 \cdot X_1 \text{ (varia com } X_1)$$

M_j refere-se ao momento em relação ao ponto no corte.

Seção BC para $0 \leq X_2 \leq 5 \text{ m}$



$$\rightarrow^+ \sum F_X = 0 \therefore -P_{BC} = 0$$

$$P_{BC} = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \therefore V_{BC} + R_{Cy} = 0$$

$$V_{BC} = -2,165 \text{ N}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_j = 0 \therefore -M_{BC} + R_{Cy} \cdot X_2 = 0$$

$$M_{BC} = 2,165 \cdot X_2$$

Lado direito para $0 \leq X_1 \leq 5 \text{ m}$

$$\rightarrow^+ \sum F_X = 0 \therefore -P_{AB} - \cos 60^\circ \cdot 5 = 0$$

$$P_{AB} = -2,5 \text{ kN}$$

$$\rightarrow^+ \sum F_y = 0 \therefore V_{AB} - \sin 60^\circ \cdot 5 + R_{Cy} = 0$$

$$V_{AB} = 4,330 - 2,165$$

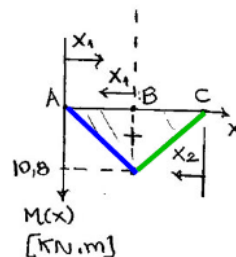
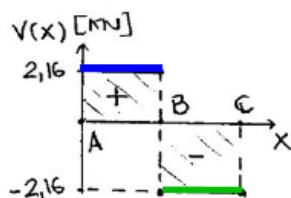
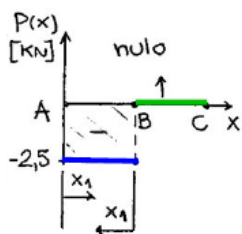
$$V_{AB} = 2,165 \text{ kN}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_j = 0 \therefore -\sin 60^\circ \cdot 5 (X_1) + R_{Oy} (X_1 + 5) - M_{AB} = 0$$

$$M_{AB} = 2,165(X_1 + 5) - 4,33 (X_1)$$

$$M_{AB} = 2,165(X_1) + 10,825$$

→ Construção dos diagramas



$$M_{AB}(x_1 = 0) = 2,165 \cdot 0 = 0$$

$$M_{AB}(x_1 = 5) = 2,165 \cdot 5 = 10,825 \text{ kN.m}$$

Neste caso, temos x_2 crescendo da esquerda para a direita, e:

$$M_{AB}(x_1 = 0) = -2,165 \cdot 0 + 10,825 = 10,825 \text{ kN.m}$$

$$M_{AB}(x_1 = 5) = -2,165 \cdot 5 + 10,825 = 0$$

Pontos críticos:

Trecho AB: máxima carga axial.

Trechos AB e BC: máximo cortante.

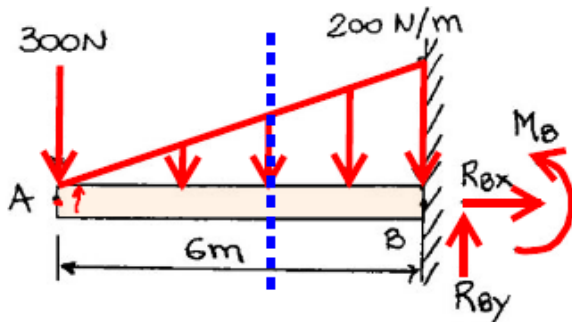
$$V_{\text{máx}}(0 \leq x \leq 5\text{m}) = 2,16 \text{ kN}$$

$$M_{\text{máx}}(5\text{m}) = 10,8 \text{ kN.m}$$

Exemplo 5.2

[Hibbeler 6ª ed. Pg. 17]

Construa os diagramas de $P(x)$, $V(x)$ e $M(x)$ e indique os valores máximos



→ Cálculo das reações

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \therefore M_B + F_1 \cdot (2) + 300 \cdot 6 = 0$$

$$M_B = -(600) \cdot 2 - 1800$$

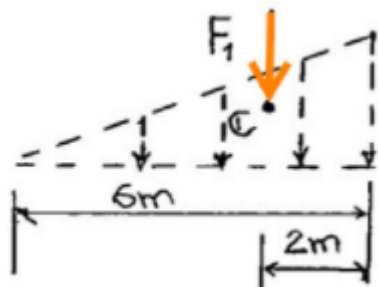
$$M_B = 3000 \text{ N.m}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \therefore -300 - F_1 + R_{By} = 0$$

$$R_{By} = 900 \text{ N}$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \therefore R_{Bx} = 0$$

Para efeito de cálculo de reações o carregamento distribuído pode ser representado por uma força concentrada equivalente atuando no centróide da área.



$$w(x) = 200 \text{ N/m}$$

$$F1 = \text{Área de } w(x)$$

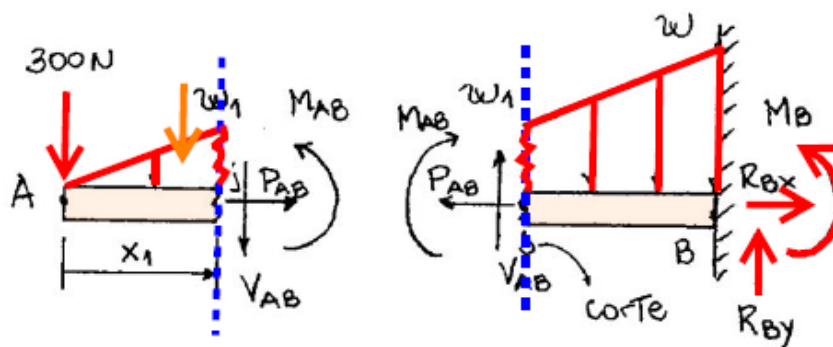
$$F1 = \frac{\left[200 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 6\text{m} \right]}{2}$$

$$F1 = 600 \text{ N}$$

O centróide de um triângulo a $\frac{1}{3}$ da base e da altura.

→ Definição das seções e cálculo dos esforços internos:

Não há descontinuidade entre A e B. Logo existe apenas uma região.

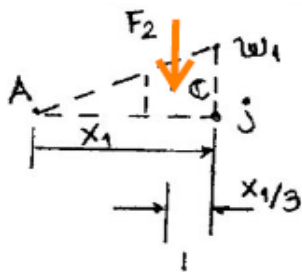


Observe que o lado esquerdo é mais simples, pois a forma seccionada do carregamento distribuído é triangular, não trapezoidal.

O valor do carregamento distribuído seccionado W_1 é:

$$\frac{W_1}{X_1} = \frac{(W=200\text{N/m})}{6\text{m}} \quad \boxed{W_1 = \frac{200}{6} \cdot X_1}$$

E a força equivalente à área é:



$$F_2 = W_1 \cdot \frac{X_1}{2}$$

$$F_2 = \left[\frac{200}{6} \cdot X_1 \right] \cdot \frac{X_1}{2}$$

$$\boxed{F_2 = \frac{100 \cdot X_1^2}{6}}$$

→ Lado esquerdo para $0 < X_1 < 6\text{m}$

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \therefore \boxed{P_{AB} = 0}$$

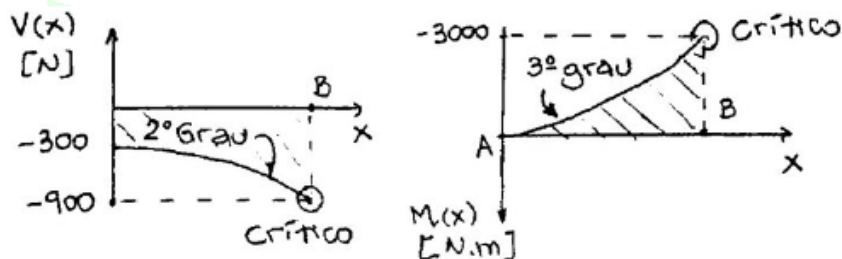
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \therefore -300 - F_2 - V_{AB} = 0$$

$$\boxed{V_{AB} = -\frac{100}{6} X_1^2 - 300}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_j = 0 \therefore M_{AB} + F_2 \cdot \left(\frac{X_1}{3}\right) + 300 \cdot X_1 = 0$$

$$\boxed{M_{AB} = -\frac{100}{18} \cdot X_1^3 - 300 \cdot X_1}$$

→ Construção dos Diagramas:



Carregamento triangular gera esforço cortante parabólico e momento fletor cúbico.

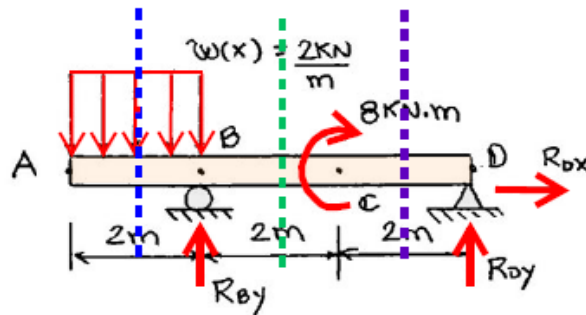
$$V_{AB}(X_1 = 6\text{m}) = -100 \cdot \frac{6^2}{6} - 300 = -900 \text{ N}$$

$$M_{AB}(X_1 = 6\text{m}) = \frac{-100}{18} \cdot (6^3) - 300 \cdot (6) = -3000 \text{ N}$$

Exemplo 5.3

[Apostila 1 – E 2.2]

Trace os de $V(x)$ e $M(x)$.



→ Cálculo das reações

$$\rightarrow^+ \sum F_x = 0 \therefore R_{Dx} = 0$$

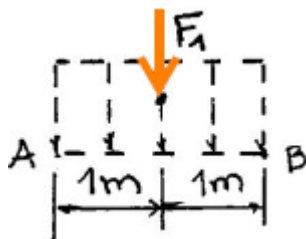
$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \therefore F_1 \cdot 1 - 8 + R_{Dy} \cdot 4 = 0$$

$$R_{Dy} = 1 \text{ kN}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_D = 0 \therefore -8 - R_{By} \cdot 4 + F_1(4 + 1) = 0$$

$$R_{By} = 3 \text{ kN}$$

O carregamento distribuído retangular $W(x)$ pode ser representado por uma força concentrada equivalente F_1 atuando no centroide da área.

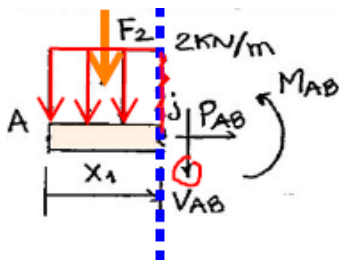


$$F_1 = \frac{2\text{kN}}{\text{m}} \cdot 2\text{m}$$

$$F_1 = 4 \text{ kN}$$

→ Definição das seções e cálculo dos esforços internos.

Seção AB para $0 < X_1 < 2\text{m}$



$$\rightarrow^+ \sum F_x = 0 \therefore P_{AB} = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \therefore -F_2 - V_{AB} = 0$$

$$-(2 \cdot X_1) - V_{AB} = 0$$

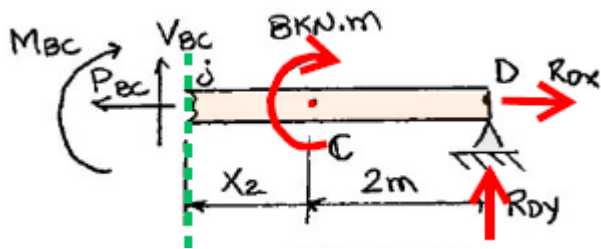
$$V_{AB} = -2 \cdot X_1$$

$$+\circlearrowleft \sum M_j = 0 \therefore M_{AB} + F_2 \cdot \frac{X_1}{2} = 0$$

$$M_{AB} = -(2 \cdot X_1) \cdot \frac{X_1}{2}$$

$$M_1 = -X_1^2 \text{ [kN.m]}$$

→ Seção BC para $0 < X_2 < 2\text{m}$



$$\rightarrow \sum F_x = 0 \therefore P_{BC} = 0$$

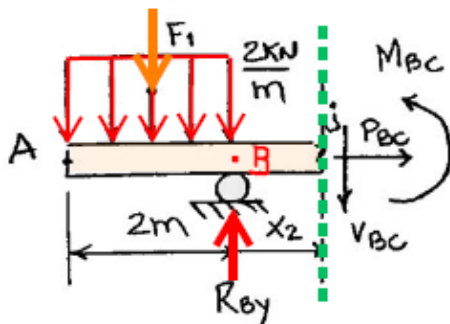
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \therefore V_{BC} + R_{DY} = 0 \therefore$$

$$V_{BC} = -1 \text{ kN}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_j = 0 \therefore -M_{BC} - 8 + R_{DY} \cdot (X_2 + 2) = 0$$

$$M_{BC} = X_2 - 6$$

→ Outra forma seria analisar o lado esquerdo à seção:



$$\rightarrow \sum F_x = 0 \therefore P_{BC} = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \therefore -F_1 + R_{BY} - V_{BC} = 0$$

$$V_{BC} = -4 + 3$$

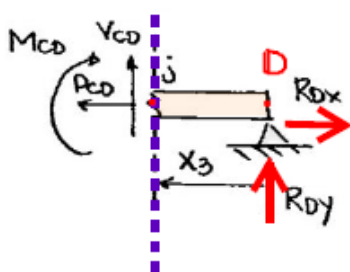
$$V_{BC} = -1 \text{ kN}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_j = 0 \therefore +M_{BC} - R_{BY} \cdot X_2 + F_1 \cdot (X_2 + 1) = 0$$

$$M_{BC} = 3 \cdot X_2 - 4 \cdot (X_2 + 1)$$

$$M_{BC} = -X_2 - 4$$

→ Seção CD para $0 < X_3 < 2\text{m}$



$$\rightarrow \sum F_x = 0 \therefore P_{CD} = 0$$

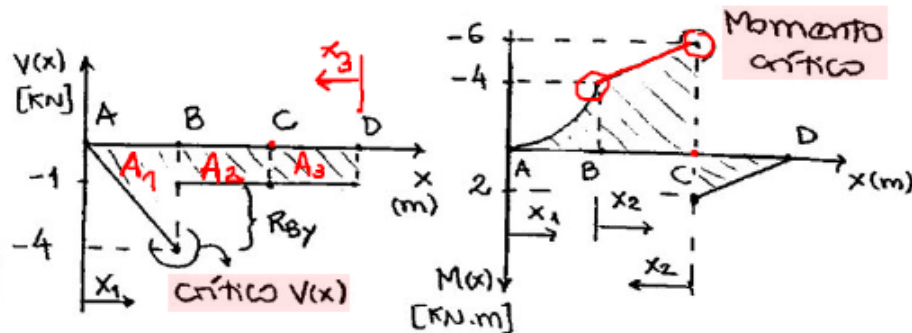
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \therefore V_{CD} + R_{DY} = 0 \therefore$$

$$V_{CD} = -1 \text{ kN}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_j = 0 \therefore -M_{CD} + R_{DY} \cdot X_3 = 0$$

$$M_{CD} = X_3$$

→ Construção dos diagramas



$$V_{AB}(2m) = -4 \text{ kN}$$

$$\begin{aligned} M_{AB}(2m) &= -4 \text{ kN.m} \\ M_{BC}(X_2 = 0) &= M_C = 0 - 6 = -6 \\ M_{BC}(X_2 = 2) &= M_B = 2 - 6 = -4 \\ \text{Ou} \\ M_{BC}(X_2 = 0) &= M_B = 0 - 4 = -4 \\ M_{BC}(X_2 = 2) &= M_C = -2 - 4 \end{aligned}$$

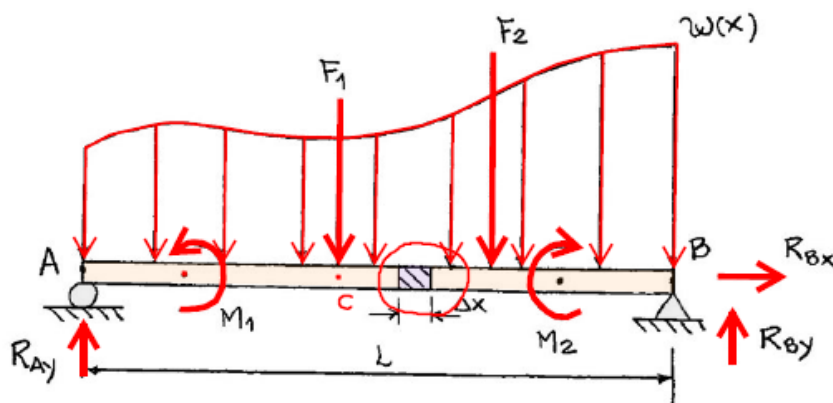
5.2 Método gráfico ou do somatório

[Beer 9ª ed. 373
Hibbeler 13ª ed. 356
Meriam 7ª ed. 280]

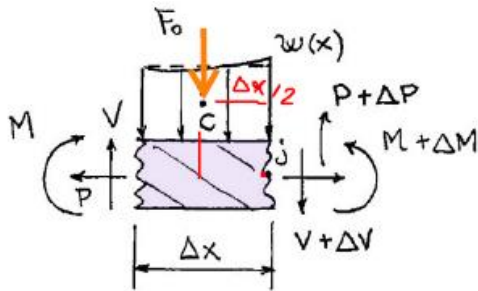
Quando uma viga está submetida a diversos tipos de carregamentos e condições de apoio, o número de seções a serem analisadas é alto, e o método das seções se torna muito trabalhoso.

Nestas situações podemos utilizar informações baseadas nas relações infinitesimais existentes entre os esforços internos $V(x)$ e $M(x)$, e os carregamentos atuantes.

Vamos considerar uma viga bi-apoiada, submetida a um carregamento distribuído $w(x)$, forças concentradas F_1 e F_2 , e momentos binários M_1 e M_2 .



Analisando o diagrama de corpo livre de uma porção Δx da viga, contendo apenas carregamento $w(x)$ temos:



Observe que estamos assumindo uma diferença entre os esforços internos em ambos os lados de ΔP , ΔV e ΔM .

Relação entre $V(x)$ e $w(x)$:

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$+V - F_0 - (V + \Delta V) = 0 \Rightarrow +V - w(x) \cdot \Delta x - V - \Delta V = 0$$

$$\Delta V = -w(x) \cdot \Delta x \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta V}{\Delta x} = -w(x)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta V}{\Delta x} \right) = \frac{dV}{dx} = -w(x) \quad \text{e} \quad \int_{V_1}^{V_2} dV = \int_{x_1}^{x_2} -w(x) dx \therefore$$

$$\Delta V = -\text{Área } w(x)$$

Relação entre $M(x)$ e $V(x)$:

$$+\circlearrowleft \sum M_i = 0$$

$$+F_0 \cdot \left(\frac{\Delta x}{2} \right) + (M + \Delta M) - V \cdot (\Delta x) - M = 0$$

$$\Delta M = V(x) \cdot \Delta x - \left[w(x) \cdot \Delta x \right] \cdot \frac{\Delta x}{2} \Rightarrow \frac{\Delta M}{\Delta x} = V(x) - \frac{w(x) \cdot \Delta x}{2}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta M}{\Delta x} \right) = \frac{dM}{dx} = V(x)$$

$$\text{e} \quad \int_{M_1}^{M_2} dM = \int_{x_1}^{x_2} V(x) dx \Rightarrow$$

$$\Delta M = -\text{Área } V(x)$$

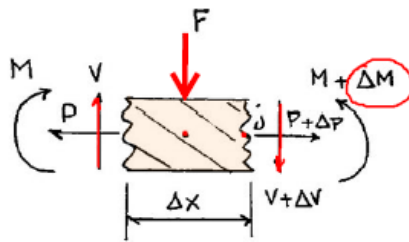
Inclinação de $M(x)$ em x , é igual a $V(x)$.

A variação de momento fletor entre dois pontos é igual a área de $V(x)$ sob os dois pontos (x_1 e x_2 , por ex.)

As equações encontradas anteriormente foram desenvolvidas para uma porção da viga submetida a apenas um carregamento $w(x)$.

Podemos ter outras duas situações: força concentrada e momento concentrado (binário); onde estas situações demandam um tratamento separado, pois criam descontinuidades nos diagramas $V(x)$ e $M(x)$.

- Força concentrada:



$$+\uparrow \sum \square = 0$$

$$\Rightarrow -(V + \Delta V) - F + V = 0$$

$$\Delta V = -F$$

Ou seja, “ao passar” pelo ponto de aplicação da força, há uma redução no esforço cortante igual ao valor de F.

$$+\circlearrowleft \sum M_j = 0$$

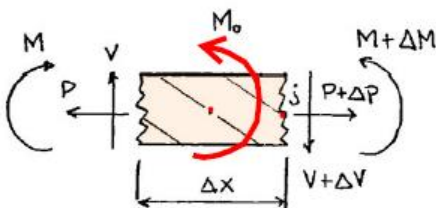
$$\therefore (M + \Delta M) + F \left(\frac{\Delta x}{2} \right) - V \cdot \Delta x - M = 0$$

$$\Rightarrow \Delta M = V \cdot \Delta x - F \cdot \frac{\Delta x}{2}$$

→ No limite, quando Δx tende a zero: $\Delta M = 0$

→ Não há variação de momento fletor na presença de uma carga concentrada.

- Momento concentrado:



$$+\circlearrowleft \sum M_j = 0$$

$$(M + \Delta M) + Mo - V \cdot \Delta x - M = 0$$

$$\Rightarrow \Delta M = V \cdot \Delta x - Mo$$

No limite, quando Δx tende a zero, $\Delta M = -Mo$

Um momento concentrado com sentido anti-horário Mo , leva a uma descontinuidade do momento fletor negativa e com valor Mo .

Observe que o esforço cortante não é alterado, não há variação, neste caso:

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \therefore \Delta V = 0$$

Pontos importantes:

- O método gráfico permite a construção dos diagramas de $V(x)$ e $M(x)$ de maneira mais rápida.
- No entanto, não oferece as expressões/funções de $V(x)$ e $M(x)$, necessárias para métodos de cálculo de deslocamento baseados em energia de

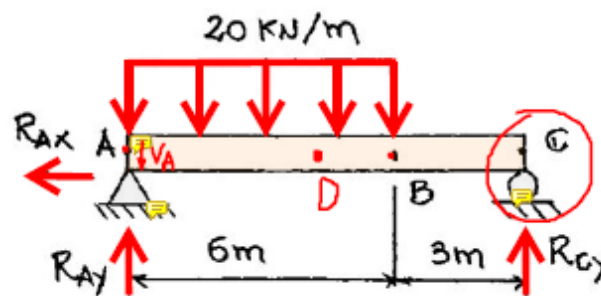
deformação.

- Ótimo complemento ao método das seções:
 - Verificação/análise dos diagramas
 - Aplicação “em conjunto”. Por exemplo, é possível construir $V(x)$ pelas seções e calcular $M(x)$ através da área de $V(x)$ ou integrando $V(x)$.
- Pontos de cortante nulo ocorrem onde $\frac{dM}{dx} = 0$, logo em pontos onde o fletor é máximo ou mínimo.
- Como $\Delta V = \int -w dx$ e $\Delta M = \int V dx$, se $w(x)$ é um polinômio de grau n , $V(x)$ terá grau $n + 1$ e $M(x)$ será um polinômio de grau $n + 2$.

Exemplo 5.4

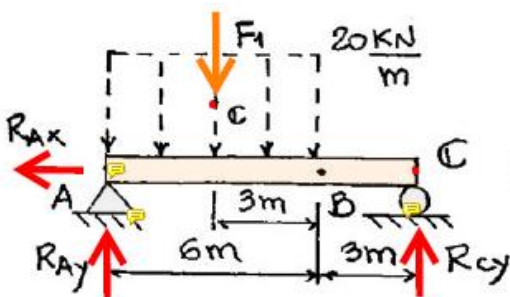
[Beer 9ª ed.]
[Sample 7.5]

Construa os diagramas de $V(x)$ e $M(x)$ e indique os valores máximos.



→ Cálculo das reações:

Para efeito de cálculo das reações, o carregamento distribuído $w(x)$ pode ser representado por uma força concentrada equivalente atuando no centróide de área sob $w(x)$:



$$F_1 = \frac{20 \text{ kN}}{\text{m}} \cdot 6 \text{ m}$$

$$F_1 = 120 \text{ kN}$$

$$+\uparrow \sum F_x = 0$$

$$\therefore R_{Ax} = 0$$

$$+\circlearrowleft \sum M_c = 0$$

$$\therefore +F_1 \cdot (6) - R_{Ay} \cdot (9) = 0$$

$$R_{Ay} = \frac{120 \cdot 6}{9}$$

\therefore

$$R_{Ay} = 80 \text{ kN}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$\therefore R_{Ay} - F_1 + R_{Cy} = 0 \therefore$$

$$R_{Cy} = 40 \text{ kN}$$

→ Força Cortante $V(x)$

Nesta viga temos duas seções: AB e BC

→ Seção AB:

Utilizamos as duas relações desenvolvidas entre $V(x)$ e $w(x)$:

$$\Delta V = -\text{Área } w(x)$$

$$\Rightarrow V_b - V_a = -120$$

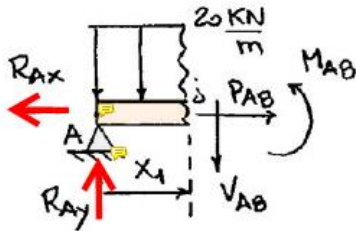
$$\frac{dV(x)}{dx} = -w(x)$$

$$\frac{dV(x)}{dx} = -20$$

Para a determinação do cortante V_b e, conseqüentemente, todos os demais cortantes das seções seguintes, precisamos conhecer ou determinar V_a – cortante inicial.

Podemos determiná-lo por:

- a) Inspeção, ou
- b) Pelo método das seções



Observe que próximo ao ponto A, a área de $w(x)$ é desprezível e o cortante será positivo e igual a R_{ay} . Logo:

$$V_a = R_{ay} \quad \therefore \quad V_a = 80\text{KN}$$

→ Pelo método das seções, aplicamos $+\uparrow \sum F_y = 0$:

$$R_{ay} - (20 \cdot x_1) - V_{ab} = 0 \quad \therefore \quad V_{ab} = 80 - 20 \cdot x_1$$

No ponto A, $V_{ab}(x_1 = 0) = 80\text{KN}$, logo, chegamos a mesma conclusão!

→ Conhecendo V_a , basta calcular a área de $w(x)$ [120KN] para se determinar V_b :

$$V_b - V_a = -120 \quad \therefore \quad V_b = -40\text{KN}$$

A expressão $\frac{dV(x)}{dx} = -20$ indica que a função V_{ab} possui uma inclinação negativa e constante igual a 20. Logo, se trata de uma reta decrescente entre A e B.

→ Seção BC:

Observe que no ponto B não há força concentrada aplicada. Logo, o esforço cortante ao passar pelo ponto B permanece o mesmo.

Nesta seção, temos:

$$\Delta V = -\text{Área } w(x) \quad \therefore \quad V_c - V_b = 0$$

$$\frac{dV(x)}{dx} = -w(x) \quad V_c = -40\text{KN}$$

$$\frac{dV(x)}{dx} = 0, \text{ confirmando a inclinação nula entre B e C}$$

→ Cortante nulo: a localização do cortante nulo será importante para a determinação do momento fletor máximo. Neste caso, podemos encontrá-lo por semelhança de triângulos:

$$\frac{80}{x} = \frac{120}{6\text{m}} \quad \therefore \quad x = 4\text{m}$$

→ Momento Fletor $M(x)$:

→ Seção AB:

Utilizamos as informações do cortante entre A e B para determinar a expressão do fletor:

$$\Delta M = \text{Área de } V(x)$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x)$$

$$M_b - M_a = A_1 + A_2$$

$$M_b - M_a = \frac{80 \cdot 4}{2} + \left[-\frac{40 \cdot 2}{2} \right]$$

$$M_b - M_a = 120\text{KN}$$

Da mesma forma como o cortante, precisamos do ponto inicial M_a . Por inspeção, como não há momento concentrado no ponto A, $M_a = 0$.

A avaliação de $M_{ab}(x_1 = 0)$ levará a mesma conclusão. Logo, $M_b = 120\text{KN} \cdot \text{m}$. Observe que o ponto com momento máximo D ($x = 4\text{m}$) pode ser encontrado através da área A_1 :

$$M_d - M_a = A_1$$

$$M_d = 160\text{KN} \cdot \text{m}$$

Ainda na seção AB, observe que, como o cortante varia linearmente, a inclinação de $M(x)$ entre A e B, também varia linearmente, com inclinação nula em D.

→ Seção BC:

$$\Delta M = \text{Área de } V(x)$$

Observe que ao passar pelo ponto B, não há momento concentrado. Logo, M_b permanece o mesmo.

$$M_c - M_b = A_b \therefore M_c - 120 = (-40 \cdot 3)$$

$$M_c = 0$$

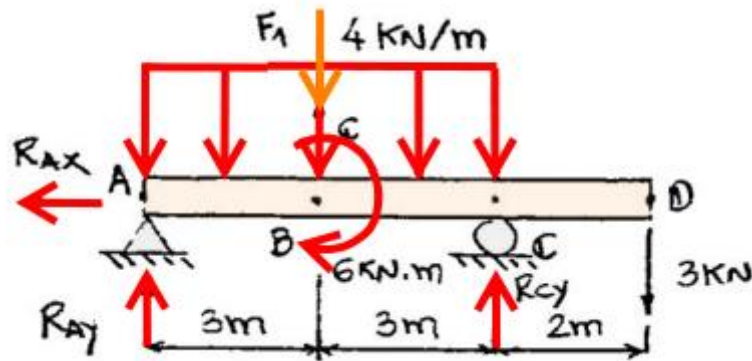
Conforme esperado
(rolete na extremidade)

Através de $\frac{dM(x)}{dx} = -40$, nota-se que uma inclinação constante negativa representa uma reta decrescente entre B e C.

Exemplo 5.5

[Beer 13ª ed. 7 – 82]

Construa os diagramas de $V(x)$ e $M(x)$.



→ Cálculo das reações

$$+\uparrow \sum F_x = 0 \therefore R_{Ax} = 0$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \therefore -F_1 \cdot 3 - 6 + R_{Cy} \cdot 6 - 3 \cdot 8 = 0$$

$$\text{Onde } F_1 = 4 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 6\text{m} \therefore$$

$$F_1 = 24 \text{ kN}$$

$$R_{Cy} = \frac{24 + 24 \cdot 3 + 6}{6} \therefore$$

$$R_{Cy} = 17 \text{ kN}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_C = 0 \therefore -R_{Ay} \cdot 6 + F_1 \cdot 3 - 6 - 3 \cdot 2 = 0$$

$$R_{Ay} = \frac{24 \cdot 3 - 12}{6} \therefore$$

$$R_{Ay} = 10 \text{ kN}$$

→ Força cortante $V(x)$
Temos três seções: AB, BC e CD.

→ Seção AB

$$V_B - V_A = -\text{Área } w(x)$$

Onde V_A , por inspeção, é $V_A = R_{Ay} \therefore V_A = 10 \text{ KN}$

$$V_B = -4 \cdot 3 + 10 \therefore V_B = -2 \text{ KN}$$

→ Seção BC

Como no ponto B não há força concentrada, o esforço cortante ao passar por B permanece o mesmo

$$V_C - V_B = -\text{Área } w(x), \text{ entre B e C}$$

$$V_C = -4 \cdot 3 + (-2) \therefore V_C = -14 \text{ KN}$$

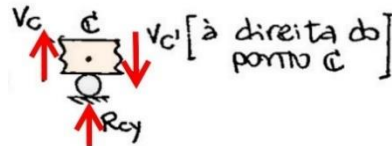
→ Ponto C

Observe que analisaremos o ponto C devido a carga concentrada relativa:

$$V_C + R_{Cy} - V_{C'} = 0$$

$$V_{C'} = V_C + R_{Cy}$$

$$V_{C'} = -14 + 17 \therefore V_{C'} = 3 \text{ KN}$$



Carga “para cima” aumenta o cortante

→ Seção CD

$$V_D - V_{C'} = 0 \therefore V_D - V_{C'} \therefore V_D = 3 \text{ KN}$$

→ Momento fletor $M(x)$

→ Seção AB

$$M_B - M_A = A_1 + A_2$$

$$M_B = \frac{10 \cdot (2,5)}{2} + \frac{-2 \cdot 0,5}{2} \therefore M_B = 12 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

Por inspeção:

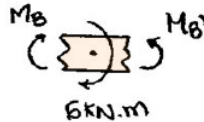
$$M_A = 0 \quad \therefore \text{pino na extremidade não oferece resistência a rotação}$$

→ Ponto B

$$M_{B'} - M_B - 6 = 0$$

$$M_{B'} = 12 + 6$$

$$M_{B'} = 18 \text{ KN} \cdot \text{m}$$



Momento horário aumenta o fletor

→ Seção BC

$$M_C - M_{B'} = A_3$$

$$M_C - M_{B'} = - \left[\frac{12 \cdot 3}{2} + 2 \cdot 3 \right]$$

$$M_C = 18 - 24 \therefore M_C = -6 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

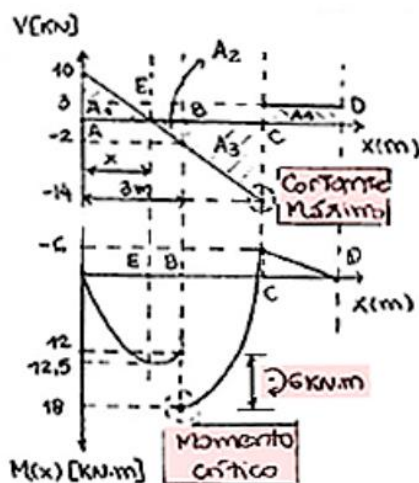
→ Seção CD

Não há momento concentrado no ponto C. Logo, o fletor permanece o mesmo:

$$M_C = -6 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

$$M_D - M_C = A_4 \therefore M_D = -6 + 3 \cdot 2 \therefore M_D = 0$$

→ Cortante nulo



$$\frac{10}{x} = \frac{12}{3}$$

$$x = 2,5 \text{ m}$$

$$M_E - M_A = A_1$$

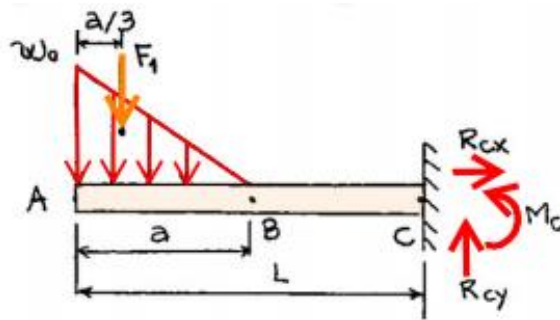
$$M_E = 12,5 + 0$$

$$M_E = 12,5 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

Exemplo 5.6

Beer 9ª ed.
[Sample problem 7.6]

Construa os diagramas de $V(x)$ e $M(x)$.



→ Cálculo das reações

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \therefore R_{cx} = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad \therefore -F_1 + R_{cy} = 0, R_{cy} = F_1 \therefore R_{cy} = \frac{w_0 \cdot a}{2}$$

$$+\curvearrowright \sum M_c = 0 \quad \therefore M_c + F_1 \cdot \left(L - \frac{a}{3}\right) = 0 \therefore M_c = -\frac{w_0 \cdot a}{2} \cdot \left(L - \frac{a}{3}\right)$$

→ Força cortante $V(x)$

Temos duas seções: AB e BC.

→ Seção AB

$$V_B - V_A = -\text{Área } w(x)$$

Onde V_A , por inspeção, é $V_A = 0$

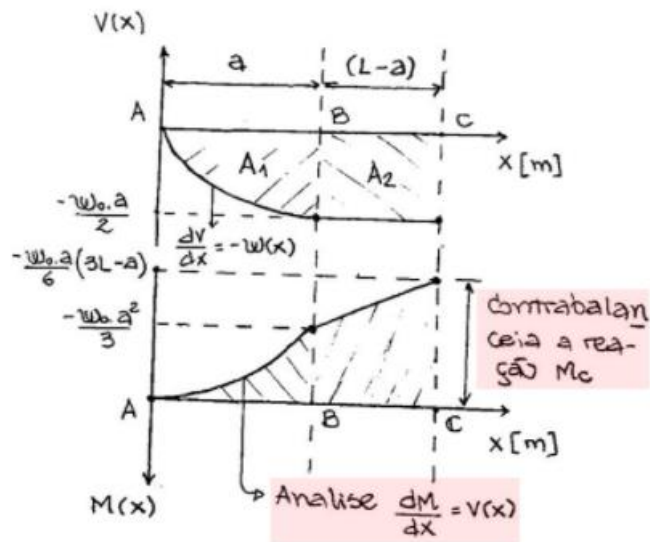
$$V_B = 0 - \frac{w_0 \cdot a}{2} \therefore V_B = -\frac{w_0 \cdot a}{2}$$

→ Seção BC

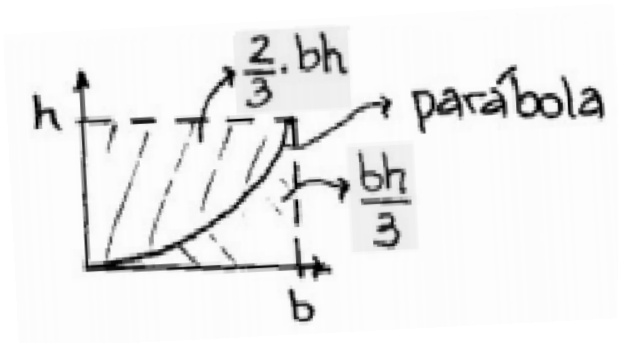
Como no ponto B não há força concentrada, o esforço cortante ao passar por B permanece o mesmo

$$V_C - V_B = -\text{Área } w(x)$$

$$V_C = -\frac{W_0 \cdot a}{2}, \text{ não há } W(x) \text{ entre B e C.}$$



→ Cálculo da área Parabólica A_1



Logo, $A_1 = \frac{2}{3} \left[a \cdot \left(\frac{-W_0 \cdot a}{2} \right) \right] \therefore A_1 = \frac{-W_0 \cdot a^2}{3}$ observe que a área será negativa se $V(x)$ for negativo.

→ Momento fletor $M(x)$

→ Seção AB

Por inspeção, $M_A = 0$ M_A só será não-nulo quando existir um momento concentrado na extremidade A.

$$M_B - M_A = \text{Área } V(x) = A_1$$

$$M_B = \frac{2}{3} \cdot (b \cdot h) \therefore M_B = \frac{2}{3} \left[a \cdot \left(\frac{-W_0 \cdot a}{2} \right) \right] \therefore M_B = \frac{-W_0 \cdot a^2}{3}$$

→ Seção BC

Não há momento concentrado no ponto B. Logo, o fletor permanece o mesmo ao passar por B.

$$M_C - M_B = \text{Área } V(x) = A_2$$

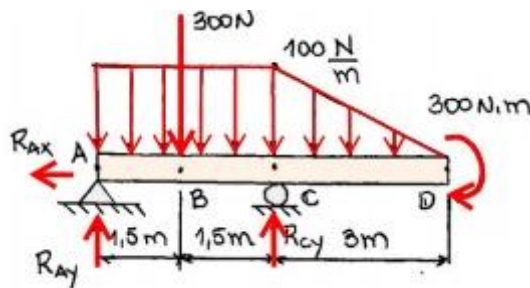
$$M_C = \frac{-W_0 \cdot a^2}{3} + \left[\frac{-W_0 \cdot a}{2} \cdot (L - a) \right] = \frac{-W_0 \cdot a^2}{3} + \frac{W_0 \cdot a^2}{2} - \frac{W_0 \cdot aL}{2}$$

$$M_c = \frac{-W_0 \cdot a^2}{6} - \frac{W_0 \cdot aL}{2}$$

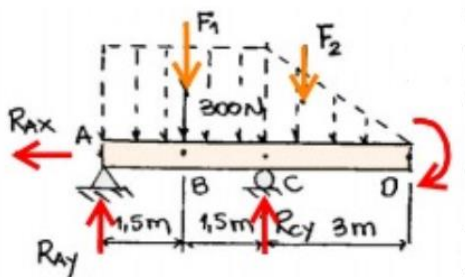
Exemplo 5.7

[Hibbeler 13ª ed. 7 – 89]

Construa os diagramas de $V(x)$ e $M(x)$.



→ Cálculo das Reações



$$F_1 = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}} 3\text{m}$$

$$F_1 = 300 \text{ N}$$

$$F_2 = \frac{100.3}{2}$$

$$F_2 = 300.3 \text{ N}$$

Note que as linhas de ação da força concentrada de 300N é a mesma da força equivalente ao carregamento retangular F_1 .

$$+\circlearrowleft \sum F_x = 0 \therefore R_{Ax} = 0$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \therefore -F_1(1,5) - 300 \cdot (1,5) + R_{Cy} \cdot (3) - F_2(3 + 1) - 300 = 0$$

$$R_{Cy} = \frac{450 + 450 + 600 + 300}{3} = R_{Cy} = 600 \text{ N}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \therefore -R_{Ay}(1,5) - R_{Cy} \cdot (1,5) - F_2(2,5) - 300 = 0$$

$$R_{Ay} = \frac{600 \cdot (1,5) - 150 \cdot (2,5) - 300}{1,5}$$

$$R_{Ay} = 150 \text{ N}$$

→ Força Cortante $V(x)$

→ Seção AB

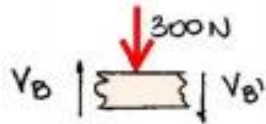
$$V_B - V_A = -\text{Área } \omega(x), \text{ onde constata-se, por inspeção, que}$$

$$V_A = R_{Ay} \therefore V_A = 150 \text{ N}$$

$$V_B = 150 - 100 \cdot (1,5) \therefore V_B = 0$$

→ Ponto B

Note que analisaremos o ponto B devido à força concentrada de 300N aplicada.



[Linha, aqui, denotando o cortante logo à direita de B.]

$$V_B - 300 - V_{B'} = 0$$

$$V_{B'} = V_B - 300 \therefore V_{B'} = -300 \text{ N}$$

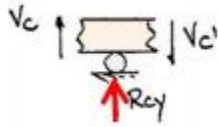
Carga “para baixo” reduz o cortante.

→ Seção BC

$$V_C - V_{B'} = -\text{Área } \omega(x)$$

$$V_C = -300 - 100 \cdot (1,5) \therefore V_C = -450 \text{ N}$$

→ Ponto C



$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$V_C + R_{Cy} - V_{C'} = 0$$

$$V_{C'} = V_C + R_{Cy}$$

$$V_{C'} = 150 \text{ N}$$

Carga “para cima” aumenta o cortante de acordo com o valor da carga.

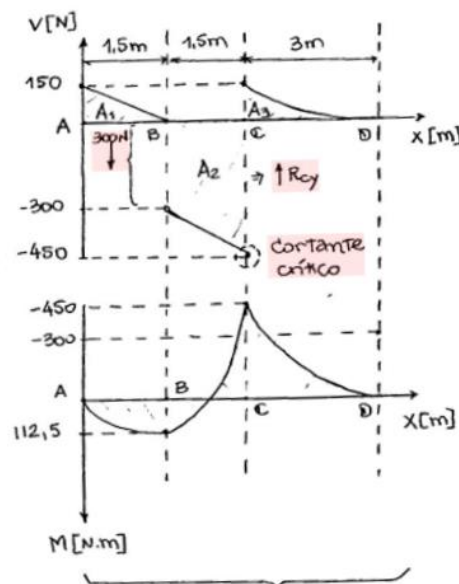
→ Seção CD

$$V_D - V_{C'} = -\text{Área } \omega(x)$$

$$V_D = V_{C'} - \frac{100 \cdot 3}{2}$$

$$V_D = 150 - 150 \therefore V_D = 0$$

Conforme esperado, pois não há força concentrada (aplicada ou reativa) na extremidade D da viga.



→ Cálculo das áreas do cortante

$$A_1 = \frac{150 \cdot (1,5)}{2}$$

$$A_1 = 112,5 \text{ N.m}$$

$$A_2 = - \left[300 \cdot (1,5) + \frac{150 \cdot (1,5)}{2} \right]$$

$$A_2 = -562,5 \text{ N.m}$$

$$A_3 = \frac{1}{3} \cdot bh \therefore A_3 = \frac{3 \cdot 150}{3}$$

$$A_3 = 150 \text{ N.m}$$

A forma das funções de fletor: parabólica entre A e C, e cúbica, entre C e D, podem ser entendidas a partir de:

$$\frac{dM}{dx} = V(x)$$

Por exemplo, observe que na seção CD a inclinação do momento no ponto C é positiva, com valor 150, decresce lentamente em direção ao ponto D e é nula no ponto D, fornecendo uma curva com concavidade para cima, uma vez que o sentido positivo do momento é para baixo.

→ Momento fletor $M(x)$

→ Seção AB

Por inspeção, $M_A = 0$

$M_B - M_A = \text{Área } V(x) \text{ entre A e B, com } B \neq A_1$

$$M_B = 112,5 \text{ N.m}$$

→ Seção BC

Não há momento concentrado no ponto B. Logo, não há alteração de fletor, e M_B permanece 112,5 N.m.

$$M_C - M_B = \text{Área } V(x)$$

$$M_C - M_B = A_2 \therefore M_C = 112,5 + (-562,5)$$

$$M_C = -450 \text{ N.m}$$

→ Seção CD

$$M_D - M_C = \text{Área } V(x)$$

$$M_D - M_C = A_3$$

$$M_D = (-450) + 150$$

$$M_D = -300 \text{ N.m}$$

Note que era esperado este valor de momento, uma vez que no ponto extremo da viga D, temos um binário horário de valor 300 N.m.

6 Forças distribuídas

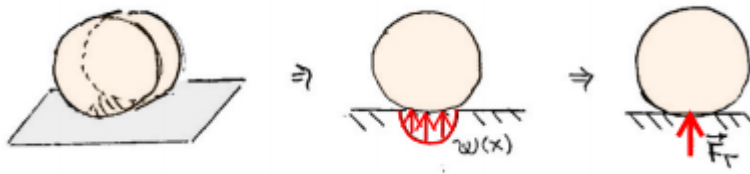
[Meriam 7ª ed. Pg. 233
Beer 3ª ed. Pg. 237
Hibbeler 13ª ed. Pg. 451]

Até então, tratamos apenas de forças e momentos concentrados ou forças distribuídas para carregamentos retangulares ou triangulares, nos quais as áreas e centroides são simples.



Na realidade, uma “força concentrada” não existe no sentido da palavra, é algo fictício, pois toda aplicação de força ocorre em uma área finita, mesmo que seja pequena.

Por exemplo, a força exercida por uma roda automotiva sobre um pavimento, é distribuída ao longo de uma área.



Mas como a área de contato é pequena com relação às outras dimensões do carro (distância entre as rodas), nós podemos aproximar esta força distribuída por uma força concentrada resultante \vec{F}_R .

Podemos dividir esse tópico em 3 categorias de problemas:
[Meriam 7ª ed. Pg. 234]

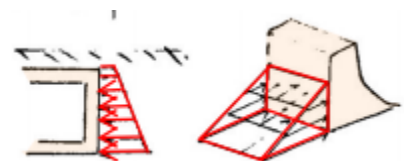
Distribuição de linha

Força distribuída ao longo de uma linha ou cabo, suportando um carregamento vertical;



Distribuição de área

Pressão hidráulica da água contra a parede de uma represa ou empuxo da terra sobre algo no subsolo;



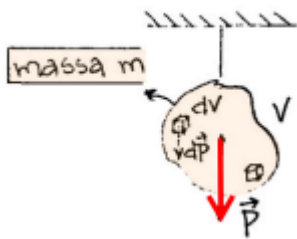
Distribuição de volume

Força gravitacional que atua em todos os elementos de massa de um corpo.

6.1 Centro de Gravidade

[Meriam 7ª ed. Pg. 235]

Vamos considerar um corpo suspenso de massa m . Cada partícula deste corpo ou elemento infinitesimal dV possui massa infinitesimal dm ao qual é atraído ao centro da Terra por uma força infinitesimal $d\vec{P}$. Notem que esta força varia ao longo do volume V , pois:



$$dP = dm \cdot g$$

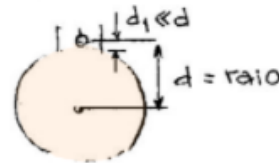
$$P = \int_V dP \cdot dV$$

$$P = \int_V [dm \cdot g] dV$$

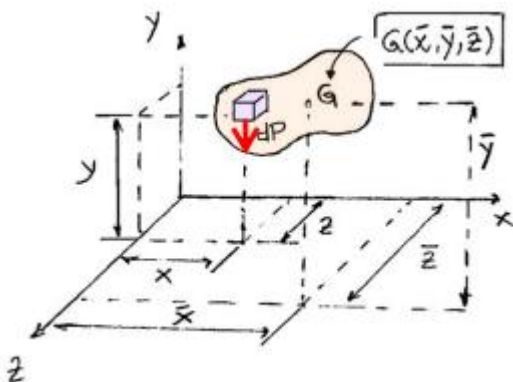
$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{d^2}$$

constante gravitacional
(experimentalmente)

A distância d entre o centro da Terra e um ponto na superfície terrestre é praticamente constante ao longo de V .



Para determinar a localização_(coordenadas) do centro de gravidade de qualquer corpo, nós devemos aplicar o princípio dos momentos às forças gravitacionais em relação aos eixos coordenados.



Em relação ao eixo x:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$dM_x = z \cdot dP \therefore \int dM_x = \int_V z dP$$

O peso total é dado por $P = \int_V dP$

$$\int dM_x = \bar{z} \cdot P = \bar{z} \int_V dP$$

Existe uma coordenada \bar{z} , posição de G , no qual o momento provocado pelo peso total P será igual a soma dos momentos infinitesimais dM provocados por dP ao longo do volume V .

Ou seja, um modelo equivalente ou simplificado, representando todo o peso P no centro de gravidade G , ocasionará os mesmos efeitos translacionais e rotacionais.

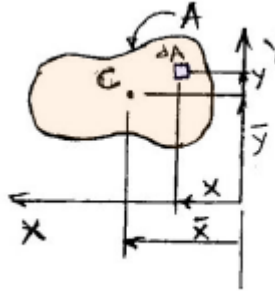
$$\bar{z} = \frac{\int_V z dP}{\int_V dP} \quad e \quad \bar{x} = \frac{\int_V x dP}{\int_V dP}$$

6.2 Centróide de área

[Hibbeler A1]

Está relacionado ao ponto que define o centro geométrico da área.

Considere uma seção transversal qualquer de área A cujo centroide está posicionado no ponto C , com coordenadas (\bar{x}, \bar{y}) com relação aos eixos de referência x e y .



Temos que a soma dos momentos de área (equivalente aos momentos gerados pelas áreas dA) deve ser igual ao momento total gerado pela área total A :

Eixo x

$$\int y dA = \bar{y} \cdot A$$

$$\bar{y} = \frac{\int_A y dA}{\int_A dA}$$

Eixo y

$$\int x dA = \bar{x} \cdot A$$

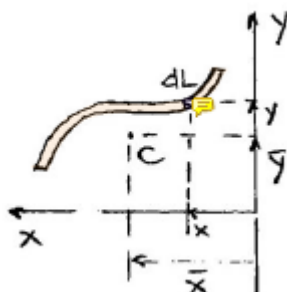
$$\bar{x} = \frac{\int_A x dA}{\int_A dA}$$

Onde as integrais $\int_A y dA$ e $\int_A x dA$ são chamadas de momento de primeira ordem ou momento estático em relação aos eixos y e x , respectivamente.

$$2x = \int_A y dA$$

$$2y = \int_A x dA$$

Centróide de Linha



Momento produzido por dL

→ Note que normalmente o centroide não se encontra sobre a linha.

$$\bar{x} = \frac{\int x dL}{\int dL}$$

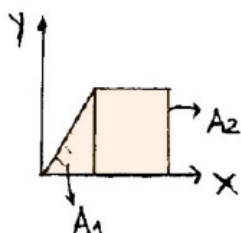
$$\bar{y} = \frac{\int y dL}{\int dL}$$

Áreas compostas

Em muitos casos, uma área pode ser decomposta ou dividida em várias partes simples (básicas). Sendo conhecida a área e a localização de cada uma dessas áreas simples, podemos substituir o processo de integração por um somatório, isto é:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{y}_i \cdot A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i \cdot A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

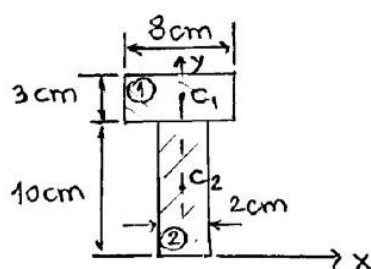


$$Q_x = \sum_{i=1}^2 \bar{y}_i \cdot A_i$$

Exemplo 6.1

[Hibbeler 3ª ed.]
[Exemplo A – 1]

Determine o centroide da figura plana



$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 \cdot A_1 + \bar{x}_2 \cdot A_2}{A_1 + A_2} = \frac{0 \cdot (3 \cdot 8) + 0 \cdot (2 \cdot 10)}{44} = 0$$

$$\bar{y} = \frac{\bar{y}_1 \cdot A_1 + \bar{y}_2 \cdot A_2}{A_1 + A_2} = \frac{(10, 15) \cdot (3 \cdot 8) + 5 \cdot (2 \cdot 10)}{44}$$

$$C(\bar{x}, \bar{y}) = C(0; 8,55\text{cm})$$

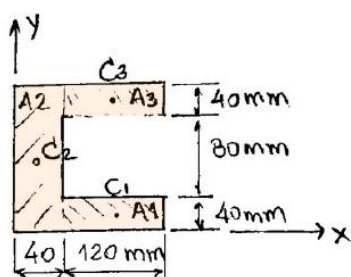
Note que $C(\bar{x}, \bar{y})$ independe do sistema de coordenadas escolhido.

Exemplo 6.2

[Hibbeler 3ª ed.]
[Exemplo A – 6]

Determine o centroide da seção transversal de uma viga perfil C,

Obtendo \bar{x} por adição:



$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 \cdot A_1 + \bar{x}_2 \cdot A_2 + \bar{x}_3 \cdot A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{100 \cdot (120 \cdot 40) + 20 \cdot (40 \cdot 160)}{2 \cdot 120 \cdot 40 + 40 \cdot 160} = 68\text{mm}$$

$$\bar{y} = \frac{\bar{y}_1 \cdot A_1 + \bar{y}_2 \cdot A_2 + \bar{y}_3 \cdot A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{20 \cdot (120 \cdot 40) + 80 \cdot (40 \cdot 160) + 140 \cdot (120 \cdot 40)}{2 \cdot (120 \cdot 40) + 40 \cdot 160} = 80\text{mm}$$

$$C(\bar{x}, \bar{y}) = C(68\text{mm}; 80\text{mm})$$

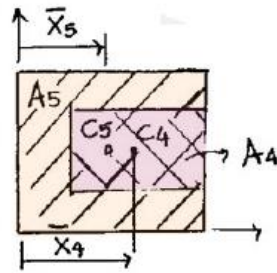
No entanto \bar{y} poderia ter sido determinado por simetria.

Obtendo \bar{x} por subtração:

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_5 \cdot A_5 - \bar{x}_4 \cdot A_4}{A_5 - A_4}$$

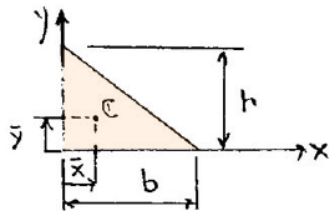
$$\bar{x} = \frac{80 \cdot (160 \cdot 160) - (40 + 60) \cdot (120 \cdot 80)}{160^2 - (120 \cdot 80)}$$

$$\bar{x} = 68\text{mm}$$



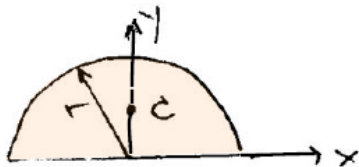
Formas de superfície

Triângulo



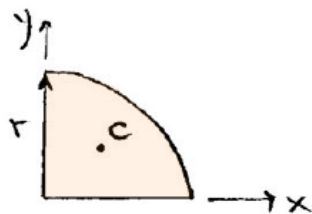
$$\bar{x} = \frac{b}{3} \quad \bar{y} = \frac{h}{3}$$

Semicírculo



$$\bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$$

Quarto de círculo



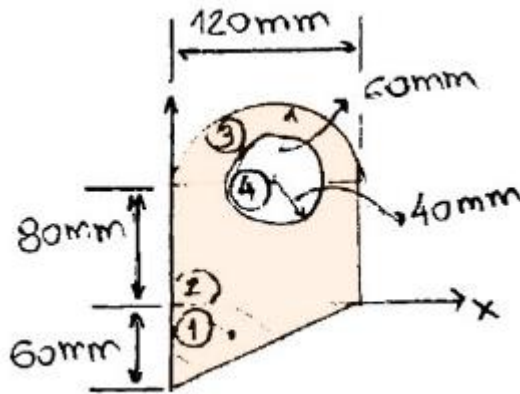
$$\bar{x} = \frac{4r}{3\pi} \quad \bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$$

Para qualquer forma com funções bem definidas podemos determinar \bar{x} e \bar{y}

Exemplo 6.3

[Beer 3ª ed.]
[Exemplo 5.3]

Determine os momentos estáticos em relação a x e y e o centroide da figura.



- Triângulo A_1
- Retângulo A_2
- Semicírculo A_3
- Círculo A_4

$$Q_x = \int y \, dA \Rightarrow$$

$$Q_x = \sum_{i=1}^n \bar{y}_i \cdot A_i$$

$$Q_x = \bar{y}_1 \cdot A_1 + \bar{y}_2 \cdot A_2 + \bar{y}_3 \cdot A_3 - \bar{y}_4 \cdot A_4$$

$$Q_x = -20 \cdot \frac{(60 \cdot 120)}{2} + 40 \cdot (80 \cdot 120) + \left(80 + \frac{4r}{3\pi}\right) \cdot \left(\frac{\pi \cdot 60^2}{2}\right) - 80 \cdot (\pi \cdot 40^2)$$

$$Q_x = 506625,48 \, \text{mm}^3$$

$$Q_y = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \cdot A_i$$

$$Q_y = \bar{x}_1 \cdot A_1 + \bar{x}_2 \cdot A_2 + \bar{x}_3 \cdot A_3 - \bar{x}_4 \cdot A_4$$

$$Q_y = 40 \cdot \frac{(60 \cdot 120)}{2} + 60 \cdot (80 \cdot 120) + 60 \cdot \left(\frac{\pi \cdot 60^2}{2}\right) - 60 \cdot (\pi \cdot 40^2)$$

$$Q_y = 757699,11 \, \text{mm}^3$$

→ Posição do centroide

$$\bar{x} = \frac{\sum \bar{x}_i \cdot A_i}{A_{\text{total}}} \Rightarrow \frac{Q_y}{A_{\text{total}}} = \frac{757699,11}{13828,32}$$

$$\bar{x} = 54,79 \, \text{mm}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}_i \cdot A_i}{A_{\text{total}}} \Rightarrow \frac{Q_x}{A_{\text{total}}} = \frac{506625,48}{13828,32}$$

$$\bar{y} = 36,61 \, \text{mm}$$

$$A_{\text{total}} = \frac{A_1}{2} + A_2 + \frac{A_3}{2} - A_4$$

$$A_{\text{total}} = \frac{60 \cdot 120}{2} + 80 \cdot 120 + \frac{\pi \cdot 60^2}{2} - \pi \cdot 40^2$$

$$A_{\text{total}} = 13828,32 \, \text{mm}^2$$

6.3 Determinação de centróides por integração

[Berr 9ª ed. 236]
[Mer. 7ª ed. 239]
[Hib. 13ª ed. 454]

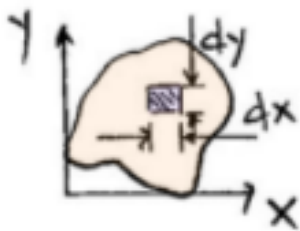
O centróide de uma área limitada por curvas analíticas (curvas descritas por equações algébricas) é determinado avaliando-se as seguintes integrais de área:
(Beer 9ª Ed. 236/Mer. 7ª Ed. 239/Hib. 13ª Ed. 454)

$$\bar{x} = \frac{\int_A x \, dA}{\int_A dA} \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{\int_A y \, dA}{\int_A dA}$$

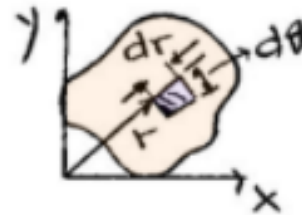
Onde $C(\bar{x}, \bar{y})$ representa o cento geométrico da área A.

Se o elemento de área dA é um pequeno retângulo de lados dx e dy , é necessário a avaliação de uma integral dupla com relação a x e y : $\int_y \int_x F(x, y) dx dy$.

Coordenadas cartesianas

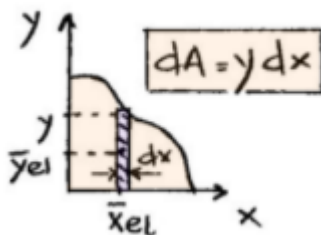


Coordenadas polares

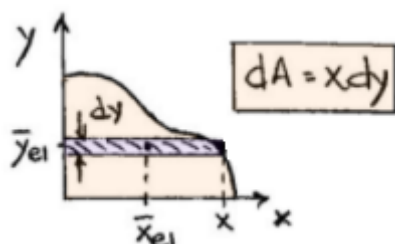


No entanto, na maioria dos casos é possível determinar o centróide de uma área com uma integral simples escolhendo um elemento diferencial da área dA como um retângulo fino (horizontal ou vertical).

Em um dA vertical, o centroide do elemento é $\bar{y}_{el} = y/2$ e $\bar{x}_{el} = x$



Em um dA horizontal, o centroide do elemento é $\bar{y}_{el} = y$ e $\bar{x}_{el} = x/2$.



Obs: No limite de $dy \rightarrow 0$ a área $\frac{dx dy}{2}$ é descartada.

Podemos então escrever o centróide $C(\bar{x}, \bar{y})$ em termos dos momentos estáticos Q_x e Q_y gerados por dA :

$$\bar{x} \cdot A = \int \bar{x}_{el} \cdot dA \quad \therefore$$

$$\bar{x} = \frac{\int \bar{x}_{el} dA}{\int dA}$$

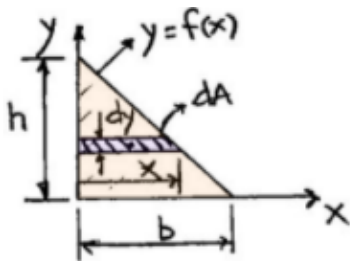
$$\bar{y} \cdot A = \int \bar{y}_{el} \cdot dA \quad \therefore$$

$$\bar{y} = \frac{\int \bar{y}_{el} dA}{\int dA}$$

Exemplo 6.4

[Hibbeler 13ª ed.]
Exemplo 9.3

Determine a coordenada \bar{y} do centróide do triângulo abaixo.



Vimos que $\bar{y} = \frac{\int_A \bar{y}_{el} dA}{\int dA}$ onde $dA = x \cdot dy$

$$dA \text{ horizontal: } \begin{cases} \bar{y}_{el} = y \\ \bar{x}_{el} = \frac{x}{2} \end{cases}$$

Equação 1º grau: $\begin{cases} y = f(x) \\ y = ax + c \end{cases}$

$$y = \left(-\frac{h}{b}\right) \cdot x + h \quad \leftrightarrow$$

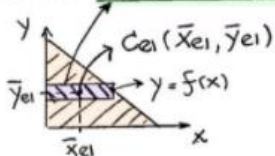
Quando $x = 0; y = h$
 $x = b; y = 0.$

$$x = \frac{(h-y)}{h} \cdot b \quad \therefore \quad x = \frac{-b}{h} \cdot y + b$$

$$\begin{cases} h = a \cdot 0 + c \quad \therefore c = h \\ 0 = a \cdot b + c \quad \therefore a = \frac{-c}{b} \quad \therefore a = \frac{-h}{b} \end{cases}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_0^h y \left[\left(\frac{-b}{h} \cdot y + b \right) \cdot dy \right]}{\int_0^h \left[\frac{-b}{h} \cdot y + b \right] \cdot dy} \quad \therefore$$

Elemento dA horizontal



$$\bar{y} = \frac{b \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^h - \frac{b}{h} \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_0^h}{b \cdot y \Big|_0^h - \frac{b}{h} \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^h} = \frac{b \cdot \frac{h^2}{2} - b \cdot \frac{h^2}{3}}{bh - \frac{bh}{2}}$$

$$\bar{y} = \frac{bh^2/6}{bh/2} = \boxed{\bar{y} = \frac{h}{3}}$$

Poderíamos calcular o centróide de x a partir do elemento de área dA horizontal através de:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\int \bar{x}_{el} dA}{\int dA}} \rightarrow \bar{x} = \frac{\int \left(\frac{x}{2}\right) dA}{\int dA}$$

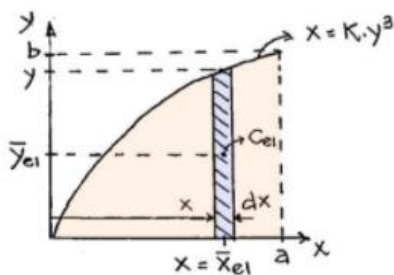
$$\bar{x} = \frac{\int_0^h \left(\frac{x}{2}\right) \cdot (x \cdot dy)}{\int_0^h \left[\frac{(h-y)}{2h} \cdot b\right] \cdot \left[\frac{(h-y)}{h} \cdot b\right] \cdot dy} = \frac{\int_0^h \left[\frac{(h-y)}{h} \cdot b\right] \cdot dy}{\int_0^h \left[\frac{(h-y)}{h} \cdot b\right] \cdot dy}$$

$$\bar{x} = \frac{\frac{b^2}{2} \int_0^h \frac{(h-y)^2}{h^2} dy}{b \int_0^h \frac{(h-y)}{h} dy} = \frac{\frac{b^2}{2h^2} \int_0^h (h^2 - 2hy + y^2) dy}{\frac{b}{h} \left[\int_0^h h dy - \int_0^h y dy \right]} \rightarrow \boxed{\bar{x} = \frac{b}{3}}$$

Exemplo 6.5

[Meriam S5/4,244]

Localize o centróide sob a curva $x = k \cdot y^3$ de $x = 0$ a $x = a$ e $y = 0$ a $y = b$.



$$\bar{x} = \frac{\int_A \bar{x}_{el} dA}{\int_A dA}$$

$$dA = y \cdot dx \quad \therefore dA = \left(\frac{x}{k}\right)^{1/3} \cdot dx$$

Quando $x = 0$; $y = 0$ e, quando $x = a$; $y = b$;

Logo, $a = k \cdot (b)^3$ e

$$k = \frac{a}{b^3}$$

$$\bar{x} = \frac{\int x \cdot \left[\frac{x}{a/b^3}\right]^{1/3} \cdot dx}{\int \left[\frac{x}{a/b^3}\right]^{1/3} \cdot dx} = \frac{\left(\frac{b}{a^{1/3}}\right) \int_0^a x^{4/3} \cdot dx}{\left(\frac{b}{a^{1/3}}\right) \int_0^a x^{1/3} \cdot dx} = \frac{\int_0^a x^{4/3} \cdot dx}{\int_0^a x^{1/3} \cdot dx} = \frac{x^{7/3} / 7/3 \Big|_0^a}{x^{4/3} / 4/3 \Big|_0^a} = \frac{4}{7} \cdot \frac{x^{1/3} \cdot x^{6/3} \Big|_0^a}{x^{1/3} \cdot x^{3/3} \Big|_0^a} \therefore \boxed{\bar{x} = \frac{4}{7} \cdot a}$$

Existem duas possíveis maneiras, com elemento diferencial:

- Vertical (1ª Solução).
- Horizontal (2ª Solução)

→ 1ª Solução: Com o elemento diferencial vertical, a variável de integração é x, e as coordenadas de $C_{el}(\bar{x}_{el}, \bar{y}_{el})$ são:

$$\begin{aligned}\bar{x}_{el} &= x \\ \bar{y}_{el} &= \frac{y}{2}\end{aligned}$$

$$\bar{y} = \frac{\int (y/2) dA}{\int dA}$$

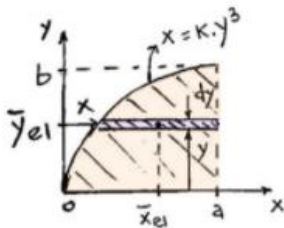
Elemento diferencial vertical

$$\bar{y} = \frac{\int_0^a \overbrace{\frac{1}{2}}^{(y/2)} \cdot \overbrace{\left(\frac{b^3 \cdot x}{a}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{b^3 \cdot x}{a}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \underbrace{dx}_{dA}}^{\text{Elemento diferencial vertical}}}{\int_0^a \left(\frac{b^3 \cdot x}{a}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot dx} \rightarrow \bar{y} = \frac{\left(\frac{b^2}{2 \cdot a^{\frac{2}{3}}}\right) \int_0^a x^{\frac{2}{3}} \cdot dx}{b / a^{\frac{1}{3}} \int_0^a x^{\frac{1}{3}} \cdot dx} = \frac{b^2 \cdot a^{\frac{1}{3}}}{2 a^{\frac{2}{3}} \cdot b} \cdot \frac{\left[\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\right]}{\left[\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right]}$$

$$\bar{y} = \frac{b}{2 \cdot a^{1/3}} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{a^{5/3}}{a^{4/3}}$$

$$\bar{y} = \frac{2}{5}b$$

→ 2ª Solução:



$$dA = (a - x)dy$$

$$\begin{aligned}\bar{x}_{el} &= x + \frac{(a - x)}{2} \\ \bar{x}_{el} &= \frac{(x + a)}{2} \\ \bar{y}_{el} &= y\end{aligned}$$

$$\bar{y} = \frac{\int \bar{y}_{el} dA}{\int dA}$$

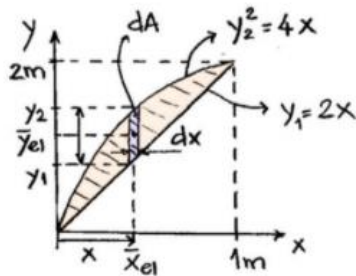
Mais trabalhoso que a integral obtida no elemento vertical

$$\bar{x} = \frac{\int_0^b \overbrace{\left(x + \frac{(a-x)}{2}\right)}^{x_{el}} \cdot \overbrace{(a-x)}^{dA} dy}{\int_0^b (a-x) dy} = \frac{\int_0^b \frac{(x+a)}{2} \cdot (a-x) \cdot dy}{\int_0^b (a-x) \cdot dy} = \frac{\int_0^b \frac{\left(\frac{a \cdot y^3}{b^3} + a\right)}{2} + \left(a - \frac{a \cdot y^3}{b^3}\right) \cdot dy}{\int_0^b a \cdot \left(1 - \frac{y^3}{b^3}\right) \cdot dy} = \dots$$

Exemplo 6.6

[Hibbeler 12ª ed.
Problem 9.32 – 9.33]

Localize o centróide da área hachurada.



Escolhendo um elemento infinitesimal de área vertical dA :

$$y_2^2 = 4x$$

ou

$$y_2 = 2x^{\frac{1}{2}}$$

$$dA = (y_2 - y_1) \cdot dx$$

$$\bar{x}_{el} = x$$

$$\bar{y}_{el} = y_1 + \frac{(y_2 - y_1)}{2}$$

$$\bar{y}_{el} = \frac{(y_1 + y_2)}{2}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^1 \bar{x}_{el} dA}{\int dA} = \frac{\int_0^1 x dA}{\int dA} = \frac{\int_0^1 x[(y_2 - y_1)dx]}{\int_0^1 (y_2 - y_1)dx} = \frac{\int_0^1 x[2x^{\frac{1}{2}} - 2x]dx}{\int_0^1 (2x^{\frac{1}{2}} - 2x)dx} = \frac{\int_0^1 (x^{\frac{3}{2}} - x^2)dx}{\int_0^1 (x^{\frac{1}{2}} - x)dx} = \frac{\int_0^1 x^{\frac{3}{2}} dx - \int_0^1 x^2 dx}{\int_0^1 x^{\frac{1}{2}} dx - \int_0^1 x dx} =$$

$$\frac{\left[\frac{5}{2} x^{\frac{5}{2}} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1}{\left[\frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1} = \frac{\frac{5}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{2/5 - 1/3}{2/3 - 1/2} = \frac{2 \cdot 3 - 1 \cdot 5}{5 \cdot 3 - 3 \cdot 5} = \frac{1}{15} \cdot \frac{6}{1} = \frac{2}{5} \rightarrow \bar{x} = 0,4 \text{ m}$$

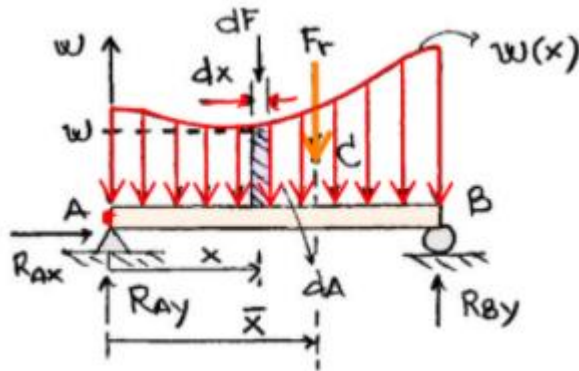
$$\bar{y} = \frac{\int_0^1 \bar{y}_{el} dA}{\int_0^1 dA} = \frac{\int_0^1 \left[\frac{y_1 + y_2}{2} \right] (y_2 - y_1) dx}{\int_0^1 (y_2 - y_1) dx} = \frac{\int_0^1 \left[\frac{2x + 2x^{\frac{1}{2}}}{2} \right] (2x - 2x^{\frac{1}{2}}) dx}{\int_0^1 (2x - 2x^{\frac{1}{2}}) dx} = \frac{\int_0^1 (x^{1/2} + x) \cdot (x - x^{\frac{1}{2}}) dx}{\int_0^1 (x - x^{\frac{1}{2}}) dx} =$$

$$\frac{\int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 x dx}{\int_0^1 x dx - \int_0^1 x^{\frac{3}{2}} dx} = \frac{\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1}{\left[\frac{x^2}{2} - \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \right]_0^1} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{2}{5}} = \frac{1/6}{1/6} \rightarrow \bar{y} = 1 \text{ m}$$

6.4 Cargas distribuídas sobre vigas

[Berr 9th Ed. pg 248]
[Mer. 7th Ed. pg273]

O conceito de centroide de área pode ser utilizado para resolver vários problemas, como o de uma viga suportando um carregamento distribuído. A carga distribuída $W(x)$ varia com x , é normalmente expressa em [N/m], unidade de força por comprimento.



$$\begin{aligned} dF &= dA \\ dF &= W(x) dx \end{aligned}$$

onde a carga total resultante é igual a área sob esta curva e atua no centroide da área.

$$F_R = \int dA = A_{\text{Total}}$$

Observe que $w \cdot dx$ é igual a magnitude de dA . Logo,

$$F_R = \int_0^L W \cdot dx$$

Para determinar a coordenada \bar{x} do centroide C , devemos observar que o momento produzido pela força resultante F_R em torno do ponto A ($F_R \cdot \bar{x}$) deve ser igual aos momentos gerados pelo carregamento infinitesimais dF equivalente à $dA = W \cdot dx$.

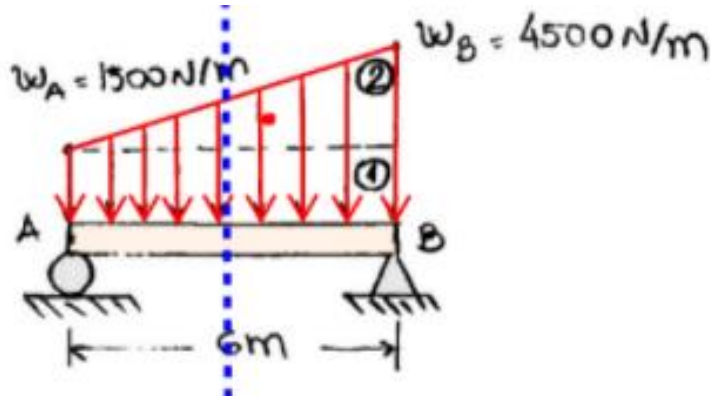
$$\begin{aligned} F_R \cdot \bar{x} &= \int_0^L dF \\ F_R \cdot \bar{x} &= \int_0^L x \cdot (w dx) \\ \bar{x} &= \frac{\int_0^L x W dx}{F_R} \end{aligned}$$

Dessa forma podemos substituir o carregamento distribuído $W(x)$ por uma força concentrada equivalente F_R atuando no centroide da área do carregamento.

Exemplo 6.7

[Berr 9ª ed.
Sample 5.9, 250]

Determine as reações no suporte



Neste caso nós temos um carregamento distribuído formado por uma área composta: 2 triângulos ou retângulo + triângulo onde conhecemos o centróide de cada área.

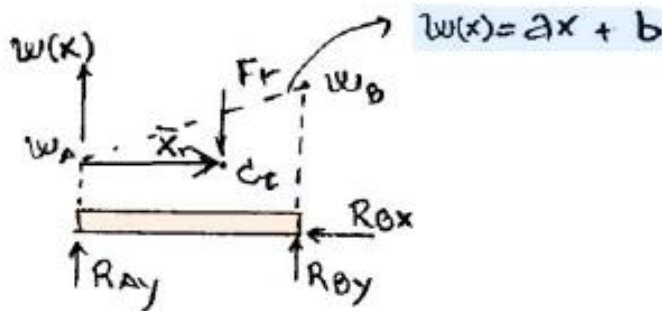
Existem duas maneiras de representar este carregamento distribuído:

→ Maneira 1

Representando uma carga concentrada equivalente à área total, onde:

$$F_R = A_{\text{Trapézio}}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^L x \cdot w(x) dx}{F_R}$$



$$\begin{cases} 1500 = a \cdot 0 + b \\ 4500 = a \cdot 6 + b \end{cases}$$

$$W(x) = 500x + 1500$$

$$F_R = \int W dx \Rightarrow F_R = \int_0^6 (500x + 1500) dx$$

$$\Rightarrow F_R = \frac{500 \cdot 6^2}{2} + 1500 \cdot 6$$

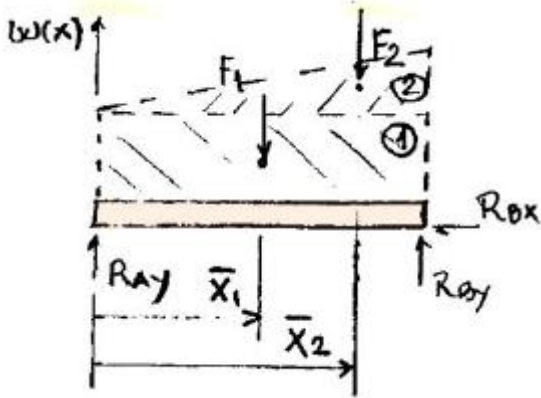
$$F_R = 18 \text{ kN}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^L (500x^2 + 1500x) dx}{\int_0^L (500x + 1500) dx}$$

$$\bar{x} = 3,5 \text{ m}$$

→ Maneira 2

Representando uma carga concentrada equivalente ao retângulo e outra equivalente ao triângulo:



$$F_1 = 1500 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 6\text{m}$$

$$F_1 = 9\text{KN}$$

$$F_2 = 3000 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot \frac{6\text{m}}{2}$$

$$F_2 = 9\text{KN}$$

Os centroides do retângulo e triângulo podem ser determinados por inspeção:

$$\bar{x}_1 = 3\text{m}$$

$$\bar{x}_2 = 4\text{m} \quad (\text{um terço da base})$$

→ Cálculo das reações:

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0$$

$$F_2 \cdot (6 - 4) + F_1 \cdot 3 - R_{Ay} \cdot 6 = 0$$

$$R_{Ay} = 7,5 \text{ kN}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0$$

$$-F_1 \cdot 3 - F_2 \cdot 4 + R_{By} \cdot 6 = 0$$

$$R_{By} = 10,5 \text{ kN}$$

→ Verificação:

$$R_{Ay} + R_{By} - F_1 - F_2 = 0$$

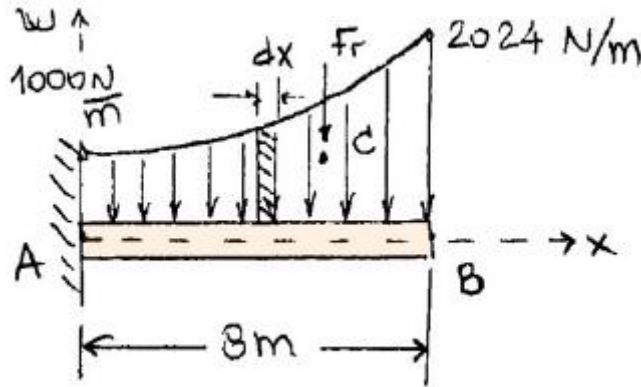
$$7,5 + 10,5 - 9 - 9 = 0$$

OK!

Exemplo 6.8

[Meriam 7ª ed.
[Sample 5.12, 247]

Determine as reações no suporte



$$W(x) = W_0 + kx^3$$

$$\begin{cases} 1000 = W_0 + k \cdot 0^3 \\ 2024 = W_0 + k \cdot 8^3 \end{cases}$$

$$W_0 = 1000$$

$$k = 2$$

$$W(x) = 1000 + 2x^3$$

$$F_R = \int_0^8 W(x) dx$$

$$F_R = \int_0^8 (1000 + 2x^3) dx$$

$$F_R = 1000 \cdot 8 + \frac{2 \cdot (8)^4}{4}$$

$$F_R = 10.048 \text{ N}$$

(área sob o carregamento distribuído)

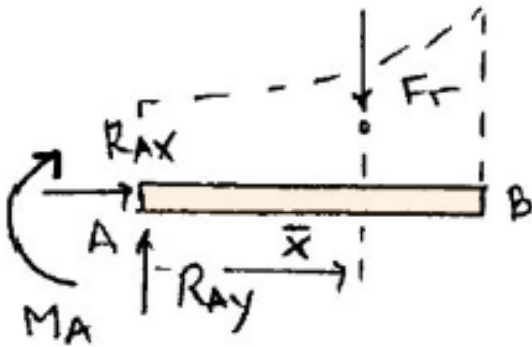
→ Cálculo do centroide:

$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{\int dA} \quad \therefore \quad \bar{x} = \frac{\int x dF}{\int dF} \quad \therefore \quad \text{onde } dF = dA = W dx$$

Logo,
$$\bar{x} = \frac{\int x(W dx)}{F_R}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^8 x(1000 + 2x^3) dx}{10048} \quad \therefore \quad \bar{x} = \frac{[1000 x^2/2]_0^8 + [2 \cdot x^5/5]_0^8}{10048} \quad \therefore \quad \bar{x} = 4,489 \text{ m}$$

→ Cálculo das reações



$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ R_{Ax} &= 0 \end{aligned}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0$$

$$\begin{aligned} -M_A - F_R \cdot \bar{x} &= 0 \\ M_A &= -10043 \cdot 4,489 \end{aligned}$$

$$M_A = -45107,2 \text{ N.m}$$

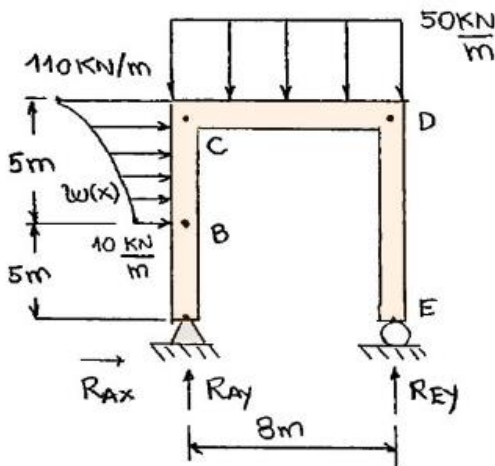
$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$R_{Ay} - F_R = 0$$

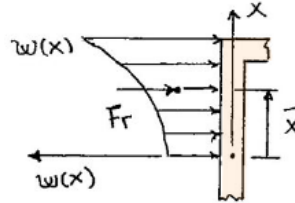
$$R_{Ay} = 10048 \text{ N}$$

Exemplo 6.9

Pórtico simples bi-apoiado submetido a um carregamento parabólico. Determine as reações considerando $W(x) = 4x^2 + 10$.



→ Força equivalente F_r



$$\begin{aligned} F_r &= \int_0^5 W(x) dx \\ F_r &= \int_0^5 (4x^2 + 10) dx \\ F_r &= \left(4 \cdot \frac{x^3}{3} + 10 \cdot x \right) \Big|_0^5 \\ F_r &= 166,67 + 50 \end{aligned}$$

$$F_r = 216,67 \text{ KN}$$

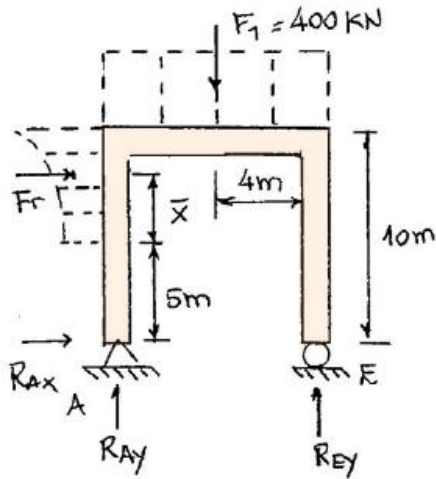
→ Cálculo do centroide \bar{x} :

$$\bar{x} = \frac{\int_0^5 x(W dx)}{\int W dx} \quad \therefore \quad \bar{x} = \frac{\int_0^5 x \cdot (4x^2 + 10) dx}{216,67} \quad \therefore \quad \bar{x} = \frac{\int_0^5 (4x^3 + 10 \cdot x) dx}{216,67}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{\left(\frac{4 \cdot x^4}{4} + \frac{10 \cdot x^2}{2} \right) \Big|_0^5}{216,67} \Rightarrow \bar{x} = \frac{(625 + 125)}{216,67} \Rightarrow \bar{x} = 3,46 \text{ m}$$

→ Cálculo das Reações:

Para efeito de cálculo das reações podemos substituir o carregamento $W(x)$ por uma força concentrada equivalente F_r atuando no centróide \bar{x} .



$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0$$

$$-F_r \cdot (5 + \bar{x}) - F_1 \cdot (4) + R_{ey} \cdot (8) = 0$$

$$R_{ey} = \frac{(216,67) \cdot (5 + 3,46) + (400 \cdot 4)}{8}$$

$$R_{ey} = 429,12 \text{ kN}$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0$$

$$F_r + R_{ax} = 0$$

$$R_{ax} = -216,67 \text{ kN}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$R_{ay} - F_1 + R_{ey} = 0$$

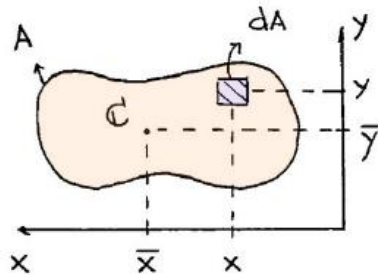
$$R_{ay} = 400 - 429,12$$

$$R_{ay} = -29,12 \text{ kN}$$

7 Momentos de Inércia

[Hibbeler 13ª ed. Pg. 515]
[Beer 9ª ed. Pg. 473]
[Meriam 7ª ed. Pg. 441]

7.1 Momentos de Inércia de Área



Vimos anteriormente que o conceito de centróide de área está relacionado ao momento estático ou momento de primeira ordem de uma área A:

Onde a soma dos momentos de área dA (com relação à qualquer eixo) deve ser equivalente ou igual ao momento total gerado pela área A, considerando a área A concentrada em um “ponto representativo”, ou no centro geométrico, com coordenada (\bar{x}, \bar{y}) .

Para o cálculo de \bar{y} ,

Realizamos o somatório dos momentos estáticos com relação torno do eixo x:

$$Q_x = \int_A y dA \rightarrow \int_A y dA = \bar{y} \cdot \int_A dA$$



Momento estático em relação á x dessa forma,

$$\bar{y} = \frac{\int_A y dA}{\int_A dA}$$

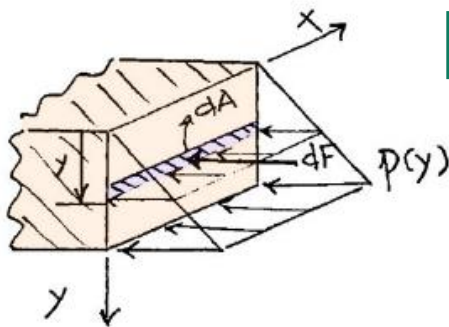
- O mesmo procedimento é adotado para o cálculo de \bar{x} .
- Podemos fazer uma analogia de Q_x com o momento \vec{M} gerado por uma força \vec{F} :

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \text{ ou } M = F \cdot d$$

onde, no caso do momento estático Q_x , quem está gerando o momento é a área A, com distância \bar{y} .

Existem em muitos problemas de engenharia, onde forças (ou pressão) são distribuídas continuamente de maneira linear ao longo da área com relação a um eixo. Nestes casos, uma força atuando em um elemento de área é diretamente proporcional à uma distância e, conseqüentemente, o momento associado é proporcional à distância ao quadrado, levando a um momento total envolvendo uma integral de forma $\int (\text{distância})^2 dA$.

Por exemplo, em problemas hidrostáticos, tem-se que o empuxo, ou a força lateral exercida pelo fluido contra a parede, varia linearmente com a profundidade.
[Hibbeler 13th, pg. 515]



$$p = \gamma \cdot y$$

Peso específico do líquido

A pressão agindo em um elemento diferencial dA é:

$$p = \frac{dF}{dA} \rightarrow dF = (\gamma \cdot y)dA$$

O momento dM exercido por dF é dado por:

$$dM = y \cdot dF \text{ ou } dM = y(\gamma \cdot y)dA$$

Logo, $dM = (\gamma \cdot y^2)dA$. Integrando dM ao longo da área A:

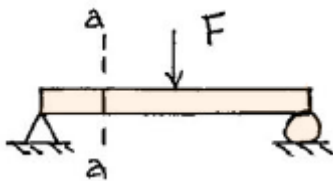
$$M = \gamma \int_A y^2 dA$$

$$I_x = \int_A y^2 dA$$

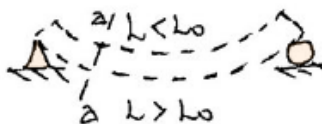
A integral de área $\int_A y^2$ representa o momento de inércia de área ou momento de segundo ordem em relação ao eixo x.

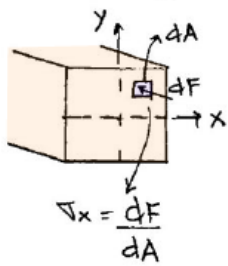
Outro exemplo, conforme será visto em Mecânica dos Sólidos I, são as vigas sob flexão.

É possível demonstrar que a tensão normal σ_x varia linearmente com y.



$$\sigma_x = -\left(\frac{\sigma_{\max}}{c}\right) \cdot y$$



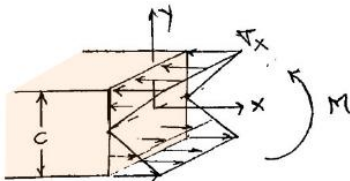


O momento dM é $dM = -y \cdot dF$, entrando na folha (use a regra da mão direita)

$$M = \int_A dM \rightarrow M = \int_A -y \cdot dF$$

$$M = \int_A -y \cdot (\sigma_x dA)$$

$$M = \int_A -y \left[\frac{-\sigma_{\max} y}{c} \right] dA$$



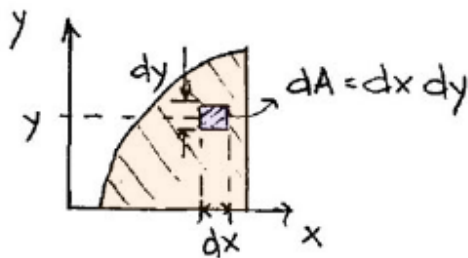
$$M = \left(\frac{\sigma_{\max}}{c} \right) \int_A y^2 dA$$

$$M = \left(\frac{\sigma_{\max}}{c} \right) \cdot I_x$$

Então, sempre que tivermos uma força variando linearmente com a distância em relação a um eixo, o momento produzido pela força envolverá uma quantidade chamada “momento de inércia de área”.

Precisamos calcular uma integral de área ao longo de A. Considere a área a seguir:

[Beer 9th pg. 474]

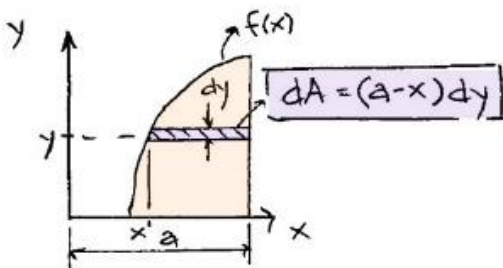


$$I_x = \int_A y^2 dA \rightarrow I_x = \int_y \int_x y^2 dx dy$$

$$I_y = \int_A x^2 dA \rightarrow I_y = \int_x \int_y x^2 dy dx$$

Dessa maneira, precisaríamos calcular integrais duplas.

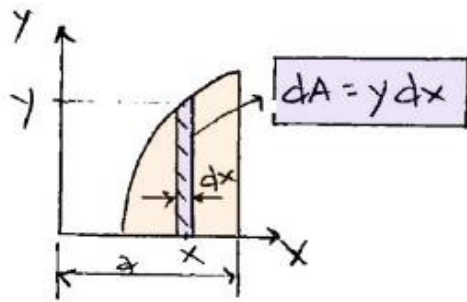
Uma maneira mais simples de calcular o momento de inércia de área é escolher o elemento infinitesimal de área dA retangular.



$$dI_x = y^2 dA$$

$$I_x = \int_A y^2 dA$$

$$I_x = \int_y y^2 (a - x) dy$$

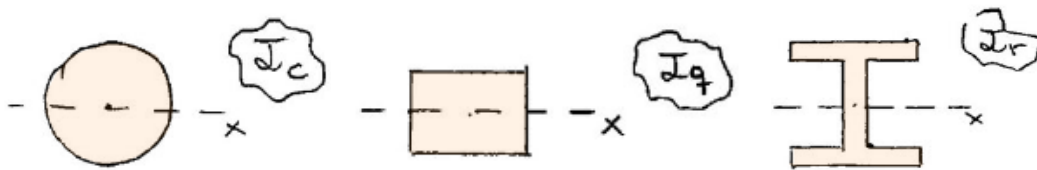


$$dI_y = x^2 dA$$

$$I_y = \int_A x^2 dA$$

$$I_y = \int_x x^2 \cdot y \, dx$$

O momento de inércia de área indica um grau de distribuição de área, ou o quanto afastado está uma área em relação a um dado eixo.



Considerando as 3 seções com a mesma área A, podemos observar que

Podemos observar que:

$$I_r > I_q > I_c$$

$$\sigma_x = \frac{-M \cdot y}{I}$$

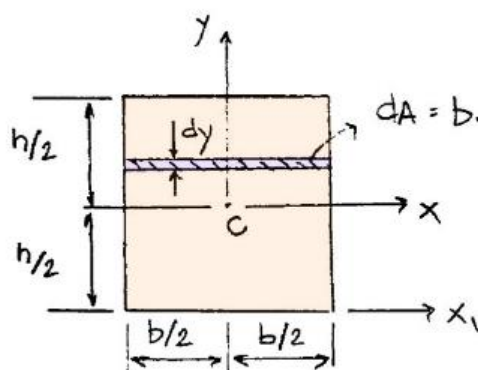
$$I \uparrow \rightarrow I_x \downarrow$$

Logo, melhor o perfil em termos de flexão!

Exemplo 7.1

[Hibbeler 13^a]
[Exemple 10.1]

Calcule o momento de inércia da área retangular em relação ao eixo x que passa pelo centroide e por x_1 .



$$I_x = \int_A y^2 dA$$

$$I_x = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 (b \cdot dy)$$

$$I_x = b \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy = I_x = b \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-h/2}^{h/2}$$

$$I_x = \frac{b}{3} \left[\frac{h^3}{8} - \left(-\frac{h^3}{8} \right) \right]$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

→ Momento de inércia de uma seção retangular

$$I_{x_1} = \int_A y^2 dA$$

$$I_{x_1} = \int_0^h y^2 (b dy)$$

$$I_{x_1} = b \int_0^h y^2 dy$$

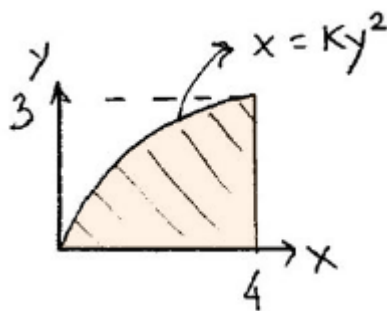
$$I_{x_1} = \frac{bh^3}{3}$$

→ Momento de inércia de uma seção retangular em relação à base

Exemplo 7.2

[Meriam 7ª]
[Sample A/4]

Determine o momento de inércia da parábola em relação ao eixo x.



→ Determinar K

x = 4 quando y = 3

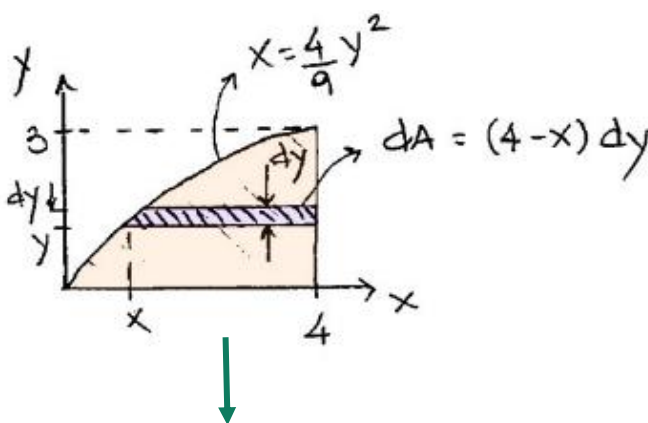
$$4 = K \cdot (3)^2$$

$$K = \frac{4}{9}$$

$$x = \frac{4}{9}y^2$$

Existem duas maneiras de resolver este problema: dA horizontal ou vertical.

→ (A) dA horizontal: Neste caso, toda a região de dA está a uma mesma distância de x, ou não varia com y.



Maneira mais simples

$$I_x = \int_A y^2 dA$$

$$I_x = \int_0^3 y^2 [(4 - x) dy]$$

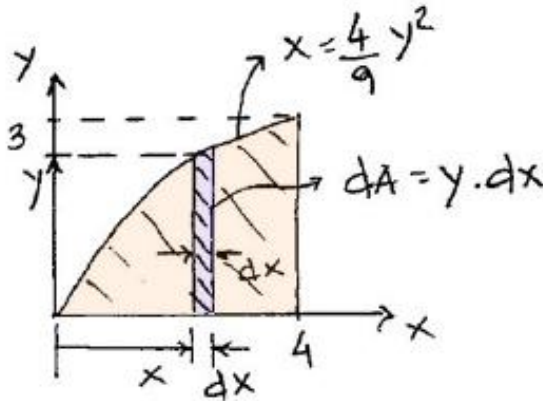
$$I_x = \int_0^3 y^2 \left[\left(4 - \frac{4}{9}y^2 \right) dy \right]$$

$$I_x = \int_0^3 4y^2 dy - \int_0^3 \frac{4}{9}y^4 dy$$

$$I_x = 4 \frac{y^3}{3} \Big|_0^3 - \frac{4}{9} \frac{y^5}{5} \Big|_0^3$$

$$I_x = 14,4 \text{ (un.)}^4$$

→ (B) dA vertical: Devemos observar que área dA possui distâncias diferentes do eixo x . Vimos que o momento de inércia de um retângulo em torno da base é $\frac{bh^3}{3}$. Logo, $dI_x = \frac{dxy^3}{3}$. Integrando o momento de inércia diferencial em relação a x , teremos:



$$I_x = \int_x dI_x$$

$$I_x = \int_0^4 \frac{y^3}{3} dx$$

$$I_x = \int_0^4 \frac{1}{3} \left[\frac{3\sqrt{x}}{2} \right]^3 dx$$

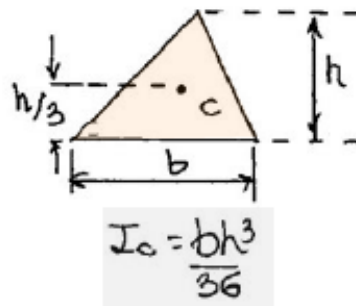
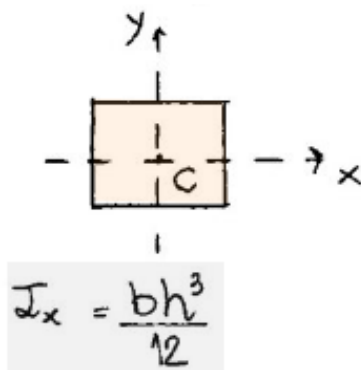
$$I_x = \frac{9}{8} \int_0^4 x^{3/2} dx$$

$$I_x = \frac{9}{8} \left[\frac{x^{5/2}}{5/2} \right]_0^4$$

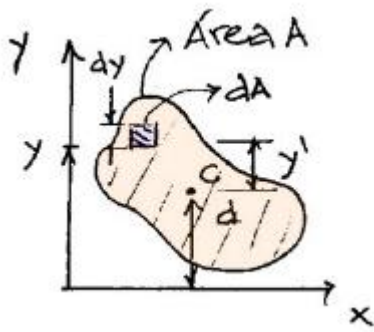
$$I_x = 14,4 \text{ (un)}^4$$

7.2 Teorema dos Eixos Paralelos (Teorema de Steiner)

Se conhecemos o momento de inércia de uma área em relação a um eixo que passa pelo centroide (ocorre com frequência, encontra-se em muitas tabelas para diferentes seções transversais).



Podemos calcular o momento de inércia em relação a qualquer eixo paralelo utilizando o Teorema dos Eixos Paralelos.



$$I_x = \int_A y^2 dA$$

Ao invés de expressar a posição de dA em termos de y , vamos expressar como " $y' + d$."

Desta forma, $I_x = \int_A (d + y')^2 dA$. Expandindo os termos, temos:

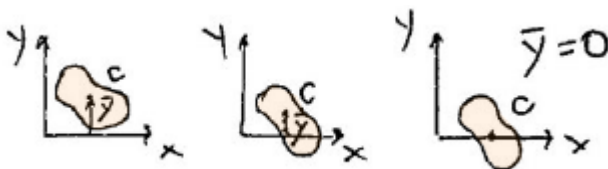
$$I_x = \int_A d^2 dA + 2 \int_A dy' dA + \int_A y'^2 dA$$

$\int_A d^2 dA \rightarrow d^2 \cdot A$, pois d é fixo.

$\int_A y'^2 dA \rightarrow I_{CG}$, normalmente conhecido.

$2d \int_A y' dA \rightarrow \int_A y' dA$ é o momento estático em relação ao centroide C ;
Onde $\int_A y' dA = \bar{y}A$.

Note o seguinte exemplo:



Independentemente da área A , $\int_A y' dA$ será sempre nulo pois $\bar{y}' = 0$.

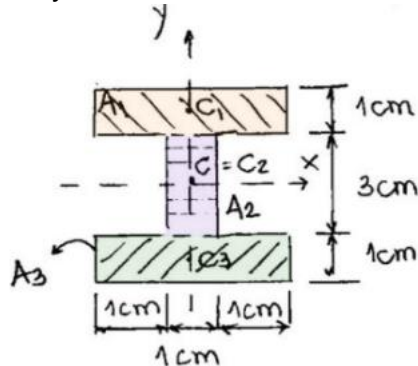
Logo, de acordo com o Teorema de Steiner, podemos calcular o momento de inércia em relação a qualquer eixo paralelo, desde que conheçamos d e A .

$$I_x = I_{CG} + d^2 A$$

Exemplo 7.3

[Pereira E6.4]

Determine os momentos de inércia em torno do centróide em relação aos eixos x e y.



Esta é uma área composta por figuras geométricas simples, onde conhecemos o momento de inércia de um retângulo em relação ao seu centróide.

$$I_x = I_{x/1} + I_{x/2} + I_{x/3}$$

$$I_{x/1} = \frac{bh^3}{12} + d_1^2 A_1 = \frac{3 \cdot (1)^3}{12} + (2)^2 \cdot (3 \cdot 1) = 12,25 \text{ cm}^4$$

$$I_{x/2} = \frac{1 \cdot (3)^3}{12} + (0)^2 \cdot (3 \cdot 1) = 2,25 \text{ cm}^4$$

$$I_{x/3} = \frac{3 \cdot (1)^3}{12} + (2)^2 \cdot (3 \cdot 1) = 12,25 \text{ cm}^4$$

$$I_x = 26,75 \text{ cm}^4$$

$$I_y = I_{y/1} + I_{y/2} + I_{y/3}$$

$$I_{y/1} = \frac{bh^3}{12} + dA^2 = \frac{1 \cdot (3)^3}{12} = 2,25 \text{ cm}^4$$

$$I_{y/2} = \frac{3 \cdot (1)^3}{12} = 0,25 \text{ cm}^4$$

$$I_{y/3} = I_{y/1} = 2,25 \text{ cm}^4$$

$$I_y = 4,75 \text{ cm}^4$$

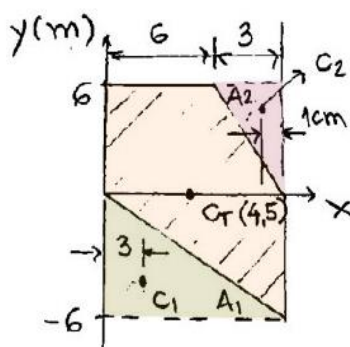
Exemplo 7.4

[Hibbeler 13ª ed.]
[Problema 10 – 37]

Determine o momento de inércia I_y

Podemos resolver este problema por adição ou subtração.

$$I_y = I_{y,A\tau} - I_{y,A1} - I_{y,A2} \therefore I_y = 1971 \text{ m}^4$$

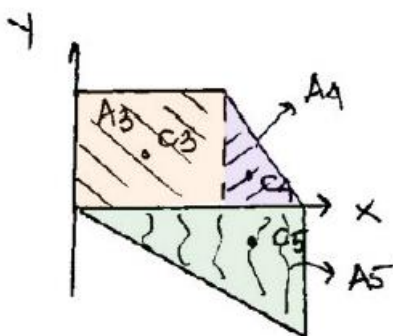


$$I_{y,A_T} = \frac{bh^3}{12} + d^2 A_T = \frac{12 \cdot (9)^3}{12} + (4,5)^2 \cdot (12 \cdot 9) = 2916 \text{ m}^4$$

$$I_{y,A_2} = \frac{bh^3}{36} + d_2^2 A_2 = \frac{6 \cdot (3)^3}{36} + (9 - 1)^2 \cdot \left(3 \cdot \frac{6}{2}\right) = 580,5 \text{ m}^4$$

$$I_{y,A_1} = \frac{bh^3}{36} + d_1^2 A_1 = \frac{6 \cdot (9)^3}{36} + (3)^2 \cdot \left(6 \cdot \frac{9}{2}\right) = 364,5 \text{ m}^4$$

Ou podemos dividir a área hachurada em 1 quadrado e 2 triângulos e somar os momentos de inércia.



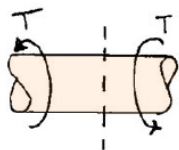
$$I_y = I_{y,3} + I_{y,4} + I_{y,5}$$

7.3 Momento polar de inércia

[Hib. 13ª ed. Pg. 517]
[Beer 9ª ed. Pg. 475]

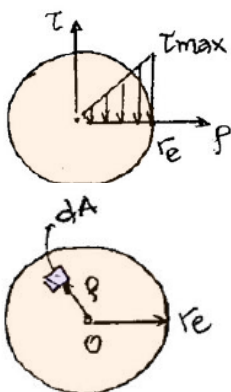
Uma integral que será muito importante em problemas de torção de eixos cilíndricos é o momento polar de inércia.

Será visto que um eixo cilíndrico submetido a um carregamento de torção desenvolverá tensões cisalhantes ao longo da seção transversal.



Eixo de transmissão

As tensões cisalhantes variam linearmente com o eixo radial ρ .



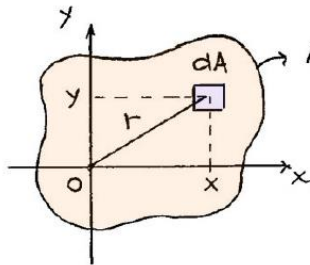
Fazendo o desenvolvimento das deformações e tensões geradas pela torção, encontramos a seguinte relação:

$$T = \frac{\tau_{\text{máx}}}{r_e} \int_A r^2 dA$$

$$T = \frac{\tau}{\rho} \cdot J_0$$

Então, o momento polar de inércia em torno do ponto O é dado por:

$$J_o = \int_A r^2 dA$$



Área genérica A

Podemos calcular o J_o a partir dos momentos de inércia I_x e I_y (eixos que passam pelo ponto o) observando que:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\text{Logo, } J_o = \int_A (x^2 + y^2) dA = \underbrace{\int_A x^2 dA}_{I_y} + \underbrace{\int_A y^2 dA}_{I_x}$$

$$J_o = I_x + I_y$$

O momento polar de inércia também respeita o teorema dos eixos paralelos:

$$J_o = J_{CG} + d^2 A$$



Onde d é a distância entre o ponto o e o centroide da área A.

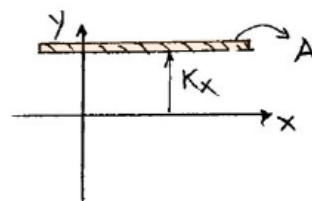
7.4 Raio de giração de uma área

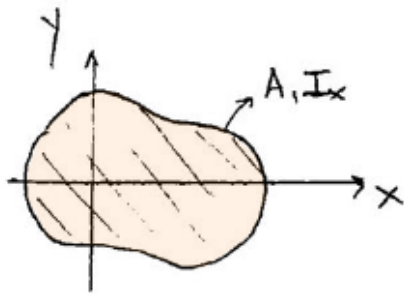
[Hib. 13ª ed. Pg. 518
Meriam 7ª ed. Pg. 443
Berr 9ª ed. Pg. 476
Paulo Mendes Pg. 23]

É uma propriedade do momento de inércia de área que se define como a distância, em relação à referência, a que uma área pode estar concentrada, para que o momento de inércia seja igual.

O raio de giração é utilizado no cálculo de flambagem das tensões normais geradas por cargas compressivas em colunas.

Considere a área A abaixo com momento de inércia I_x em relação ao eixo x.





K_x será o raio de giração de modo que o momento de inércia I_x gerado pelo retângulo horizontal seja o mesmo que a área original A.

Observe o seguinte fato: no caso de uma tira concentrada com área A, I_x' se torna:

$$I_x' = \frac{bh^3}{12} + d^2A$$

b se torna um valor grande e h (+ importante) muito pequeno. Logo, $\frac{bh^3}{12} \approx 0$

Então: $I_x = d^2A$ ou $I_x = K_x^2A$

O raio de giração da área A em relação a x é:

$$K_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

O mesmo procedimento se aplica ao eixo y:

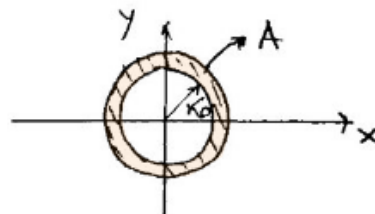
$$K_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

e ao momento polar de inércia em relação a um ponto O:

$$K_o = \sqrt{\frac{J_o}{A}}$$

onde K_o é a distância a partir do ponto O no qual o momento polar de inércia de A seja o mesmo.

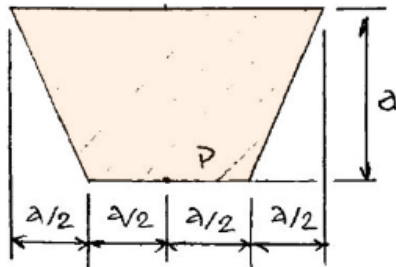
$$K_o^2 = K_x^2 + K_y^2$$



Exemplo 7.5

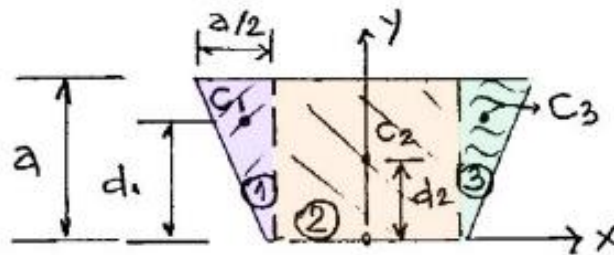
[Beer 9ª ed. Pg. 475]
[Problema 9.22]

Determine o momento polar de inércia e o raio de giração polar em relação ao ponto P.



Podemos resolver este problema de duas maneiras: utilizando o momento de inércia de figuras compostas ou por integração direta.

- (A) Figuras compostas: $J_p = I_x + I_y$



$$I_x = I_{x,1} + I_{x,2} + I_{x,3}$$

$$I_{x,1} = I_{CG} + d_1^2 A_1$$

$$I_{x,1} = \frac{bh^3}{36} + \left(\frac{2}{3}a\right)^2 \cdot \frac{\left(\frac{a}{2}a\right)}{2} = \frac{1}{8} \cdot a^4$$

$$I_{x,2} = \frac{bh^3}{12} + d_2^2 A_2 = \frac{a \cdot a^3}{12} + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot (a \cdot a) = a^4/3$$

$$I_{x,3} = I_{x,1} = a^4/8$$

$$I_x = \frac{a^4}{8} + \frac{a^4}{3} + \frac{a^4}{8} = \frac{7}{12} a^4$$

$$I_y = I_{y,1} + I_{y,2} + I_{y,3}$$

$$I_{y,1} = I_{CG} + d^2_1 A_1$$

$$I_{y,1} = \frac{bh^3}{36} + \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{6}\right)^2 \cdot \frac{\left(\frac{a}{2} \cdot a\right)}{2} =$$

$$I_{y,1} = \frac{a}{36} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^3 + \frac{4 \cdot a^2}{9} \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{33}{288} a^4$$

$$I_{y,2} = \frac{bh^3}{12} = a^4/12$$

$$I_{y,3} = I_{y,1} = [\text{por simetria}]$$

$$I_y = 2 \cdot \left[\frac{33 \cdot a^4}{288} \right] + \frac{a^4}{12} = 0,3125a^4$$

$$J_p = I_x + I_y$$

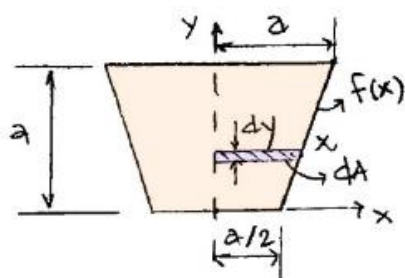
$$J_p = \frac{7}{12} a^4 + 0,3125a^4 \therefore J_p = 0,8958 a^4$$

- Raio de giração polar K_p

$$K_p = \sqrt{\frac{J_p}{A}} \quad A = 2 \cdot \left[\left(\frac{a}{2} \right) + \frac{a}{2} \cdot a \right] = \frac{3}{2} a^2$$

$$K_p = \sqrt{\frac{0,8958a^4}{\frac{3}{2}a^2}} \therefore K_p = 0,773a$$

- (B) Integração direta:



$$y = cx + d$$

$$\begin{cases} y = 0, & x = a/2 \\ y = a, & x = a \end{cases}$$



Determinação da função $f(x)$

$$\begin{cases} 0 = c \cdot \left(\frac{a}{2}\right) + d \\ a = c \cdot (a) + d \end{cases} \longrightarrow \text{Subtraindo, temos:}$$

$$-a = c \cdot \left(-\frac{a}{2}\right)$$

$$c = 2 \text{ e } d = -a$$

$$y = 2x - a$$

$$dA = x \cdot dy$$

$$I_x = 2 \int_A y^2 dA$$

$$I_x = 2 \int_A y^2 (x dy$$

$$I_x = 2 \int^a y^2 \left[\frac{y+a}{2} \right] dy$$

$$I_x = 2 \int_0^a \frac{y^3}{2} dy + 2 \int_0^a \frac{a}{2} y^2 dy$$

$$I_x = 2 \cdot \left[\frac{y^4}{8} \Big|_0^a + \frac{a}{3} \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_0^a \right]$$

$$I_x = \left[\frac{a^4}{8} + \frac{a^4}{6} \right]$$

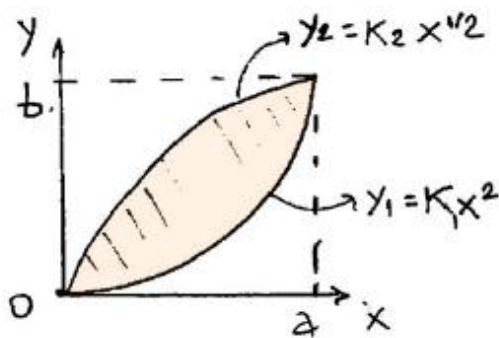
$$I_x = \frac{7}{12} a^4$$

Exemplo 7.6

[Berr 9ª ed.
Problemas 9.16, 9.18]

Determine o momento polar de inércia e o raio de giração K_x .

$$\begin{cases} y_2 = b, & x = a \\ y_2 = 0, & x = 0 \end{cases}$$



$$b = K_2 \cdot a^{1/2}$$

$$K_2 = \frac{b}{a^{1/2}}$$

$$b = K_1 \cdot a^2$$

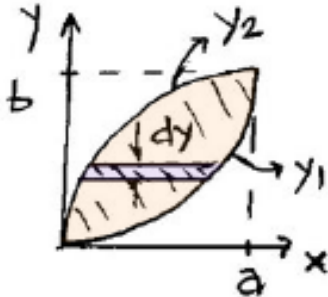
$$K_1 = \frac{b}{a^2}$$

$$y_2 = \frac{b}{a^{1/2}} \cdot x^{1/2}$$

$$y_1 = \frac{b}{a^2} \cdot x^2$$

→ Cálculo de I_x

- (A) dA Horizontal



$$dA = (x_1 - x_2)dy$$

$$x_2 = \frac{a}{b^2}y^2 \text{ e } x_1 = \frac{a}{b^{1/2}}y^{1/2}$$

$$I_x = \int_A y^2 dA$$

$$I_x = \int_0^b y^2 (x_1 - x_2) dy$$

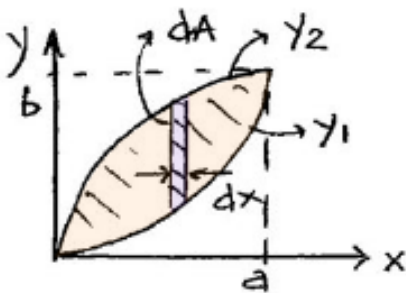
$$I_x = \int_0^b y^2 \left[\frac{a}{b^{1/2}} y^{1/2} - \frac{a}{b^2} y^2 \right] dy$$

$$I_x = \left[\frac{a}{b^{1/2}} \cdot \frac{y^{7/2}}{7/2} \right]_0^b - \left[\frac{a}{b^2} \cdot \frac{y^5}{5} \right]_0^b$$

$$I_x = \frac{ab^3}{7/2} - \frac{ab^3}{5} \quad \therefore \quad I_x = \frac{3}{35} ab^3$$

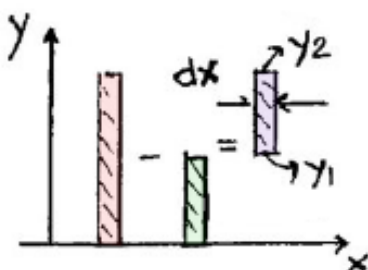
Outra alternativa para calcular I_x é com dA vertical:

- (B) dA Vertical : Área dA possui distância diferente do eixo x .



$$dI_x = dx \cdot \frac{y^3}{3}$$

Com relação à base do retângulo



$$dI_x = \left| \frac{dx \cdot y_2^3}{3} \right| - \left| \frac{dx \cdot y_1^3}{3} \right|$$

$$I_x = \frac{1}{3} \left[\left(\frac{b}{a^{1/2}} \cdot x^{1/2} \right)^3 - \left(\frac{b}{a^2} \cdot x^2 \right)^3 \right] dx$$

$$I_x = \int_0^a \left(\frac{b^3}{a^{3/2}} \cdot x^{3/2} - \frac{b^3}{a^6} \cdot x^6 \right) dx$$

$$I_x = \frac{b^3}{3a^{3/2}} \cdot \frac{a^{5/2}}{5/2} - \frac{b^3}{3a^6} \cdot \frac{a^7}{7} \quad \therefore \quad I_x = \frac{3}{35} ab^3$$

→ Área A:

$$A = \int_0^a (y_2 - y_1) dx$$

$$A = \int_0^a \left(\frac{b}{a^{1/2}} \cdot x^{1/2} - \frac{b}{a^2} \cdot x^2 \right) dx$$

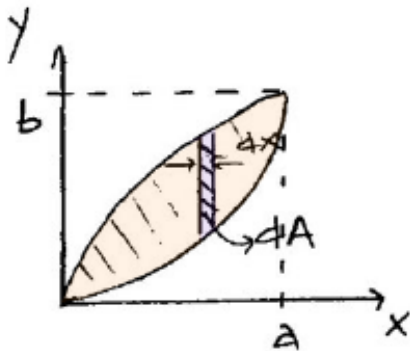
$$A = \frac{2}{3} \frac{b}{a^{1/2}} \cdot a^{3/2} - \frac{b}{3a^2} \cdot a^3 \quad \therefore \quad \boxed{A = \frac{ba}{3}}$$

Logo:

$$K_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{0,0857}{ab/3}} \quad \boxed{K_x = 0,05709 \cdot b}$$

→ Cálculo de I_y

- dA Vertical: Não há variação de distância de dA em relação ao eixo y.



$$I_y = \int_A x^2 dA$$

$$I_y = \int_0^a x^2 (y_2 - y_1) dy$$

$$I_y = \int_0^a x^2 \left[\frac{b}{a^{1/2}} x^{1/2} - \frac{b}{a^2} x^2 \right] dx$$

$$I_y = \frac{b}{a^{1/2}} \cdot \frac{a^{7/2}}{7/2} - \frac{b}{a^2} \cdot \frac{a^5}{5}$$

$$I_y = \frac{2}{7} \cdot ba^3 - \frac{1}{5} ba^3 \quad \therefore \quad \boxed{I_y = 0,0857 ba^3}$$

$$\boxed{dA = (y_2 - y_1) dx}$$

→ Portanto:

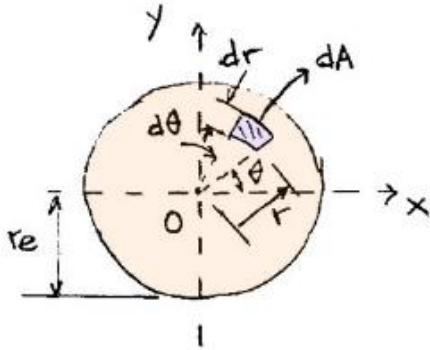
$$J_o = I_x + I_y$$

$$\boxed{J_o = 0,0857 ab^3 + 0,0857 ba^3}$$

Exemplo 7.7

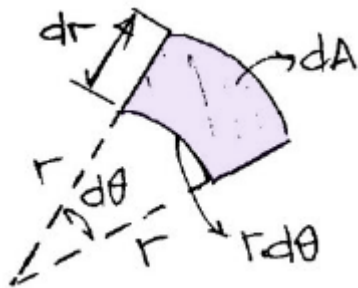
[Meriam 7ª ed.]
[Sample A/3]

Determine o momento polar de inércia em relação ao centro do círculo e o momento de inércia em relação ao eixo x.



É mais conveniente descrever a posição de um ponto em áreas circulares em termos de coordenadas polares: r e θ .

O momento polar de inércia em torno do ponto O é:



$$J_o = \int_A r^2 dA$$

$$J_o = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_e} r^2 [r dr d\theta]$$

$$J_o = \int_0^{2\pi} \frac{r_e^4}{4} d\theta$$

$$J_o = \frac{\pi}{2} r_e^4$$

$$J_o = \frac{\pi r_e^4}{4}$$

$$dA = (r d\theta) \cdot dr$$

Se tivéssemos um semicírculo, os limites de integração em seriam de 0 a π e.

Para calcularmos o momento de inércia de área em relação ao eixo x: I_x precisamos descrever a distância de dA em relação ao eixo x:

$$I_x = \int_A y^2 dA$$

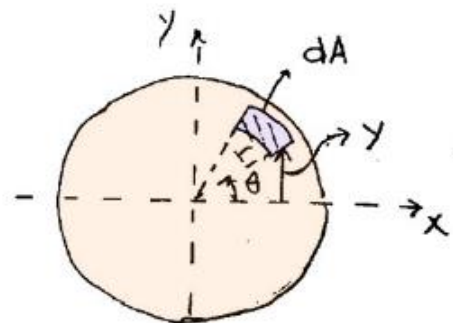
$$I_x = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_e} y^2 [r dr d\theta]$$

$$I_x = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_e} (r \cdot \sin \theta)^2 r dr \cdot d\theta$$

$$I_x = \int_0^{2\pi} \left(\frac{r_e^4}{4} \right) \sin^2 \theta \cdot d\theta$$

$$I_x = \frac{r_e^4}{4} \left[\frac{1}{2} \left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \right]_0^{2\pi}$$

$$I_x = \frac{\pi}{4} r_e^4$$



$$y = r \cdot \sin \theta$$

$$dA = (r \cdot d\theta) \cdot dr$$

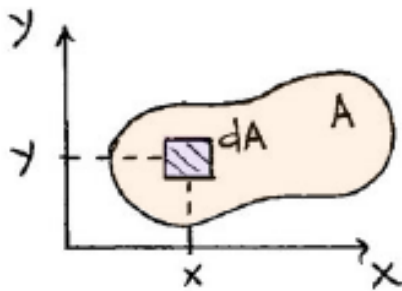
Momento de inércia em relação a qualquer eixo que passe centro de círculo

7.5 Produto de inércia de área

Em certos problemas envolvendo seções transversais assimétricas e no cálculo de momento de inércia com relação a eixos rotacionados, a expressão $dI_{xy} = x \cdot y \cdot dA$ surge, com a seguinte forma quando integrada ao longo de A:

$$I_{xy} = \int_A xy dA$$

Onde x e y são as coordenadas do elemento de área $dA = dx \cdot dy$. A quantidade I_{xy} é denominada produto de inércia da área A com relação aos eixos x e y.



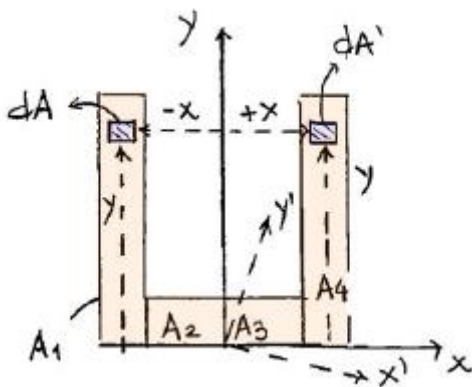
Enquanto os momentos de inércia de área $I_x = \int_A y^2 dA$ e $I_y = \int_A x^2 dA$ são entidades sempre positivas, o produto de inércia I_{xy} pode ser positivo, negativo ou nulo.

Uma vez que I_{xy} relaciona as distâncias a partir dos eixos, o produto de inércia oferece uma indicação de simetria da área A com relação aos dois eixos:

↑ I_{xy} ↓ simétrico

- Quanto maior o I_{xy} , menor a simetria e,
- Quando há simetria em relação a um ou dois eixos, $I_{xy} = 0$.

Por exemplo, no caso de um perfil U:



Observe que dividindo a área total A nas áreas A_1, A_2, A_3 e A_4 , veremos que a contribuição de dA cancelará a contribuição de dA' .

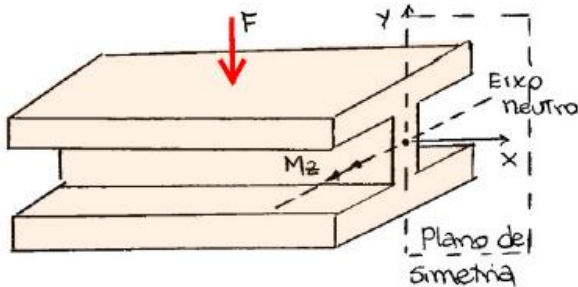
$$\begin{aligned} \sum (-x_1) \cdot y_1 \cdot A_1 + \sum (x_4) \cdot y_4 \cdot A_4 &= 0 \\ \sum (-x_2) \cdot y_2 \cdot A_2 + \sum (x_3) \cdot y_3 \cdot A_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I_{xy} = 0$$

Para este mesmo perfil simétrico no plano vertical, o produto de inércia seria não-nulo com relação ao sistema de coordenadas (x', y') : $I_{x'y'} \neq 0$.

- Aplicação:

Na análise de Flexão Pura Simétrica (assunto visto em Mecânica dos Sólidos, o momento fletor interno atua no plano de simetria e o cálculo é dado pela fórmula de flexão no regime elástico.



Devido a simetria da seção e dos carregamentos aplicados, pode-se concluir que o membro permanecerá simétrico com relação de simetria no qual o momento M_z está agindo.

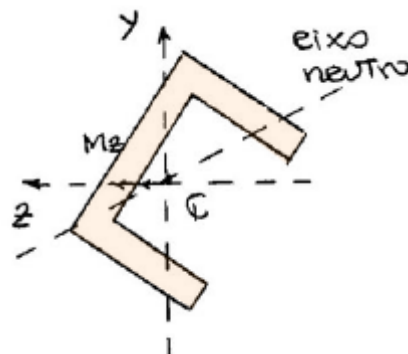
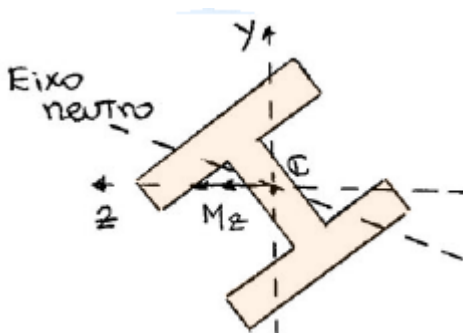
Nestes casos, o momento M_z atua ao longo do eixo neutro (onde não há deformação) e gera tensões normais ao longo da seção conforme a Fórmula da Flexão no Regime Elástico:

$$\sigma_x = -\frac{M \cdot y}{I_{EN}} \quad I_{EN} = \text{Momento de inércia de área com relação ao eixo neutro}$$

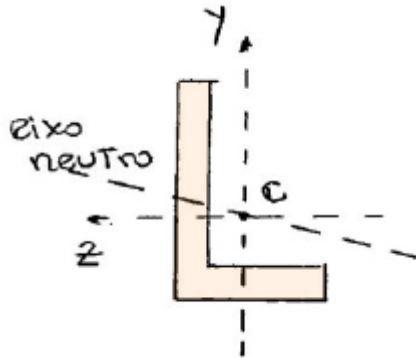
Flexão Assimétrica: existem situações onde o momento fletor não age no plano de simetria do momento, pois

- O carregamento externo possui componentes oblíquas que geram momento fletor interno fora do plano de simetria da seção transversal, e/ou
- O membro não possui nenhum plano de simetria.

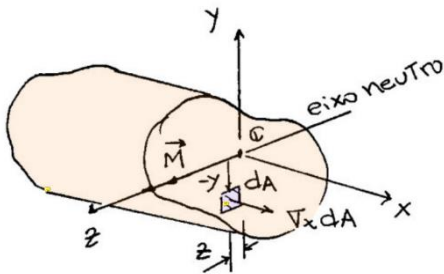
→ Seções simétricas e carregamento assimétrico:



→ Perfil assimétrico:



Nos casos de flexão assimétrica, iremos supor que o eixo neutro coincide com um eixo arbitrário z.



A força infinitesimal dF_x , associada à tensão normal σ_x atuando em dA é:

$$dF_x = \sigma_x dA$$

Aplicando os equilíbrios ao longo da seção A, temos:

$$\sum F_x = 0$$

$$\therefore \int_A \sigma_x \cdot dA = 0 \quad (\text{Não há força resultante}).$$

$$\sum M_y = 0$$

$$\therefore \int_A (z) \cdot \sigma_x \cdot dA = 0 \quad (I).$$

$$\sum M_z = 0$$

$$\therefore \int_A (-y) \cdot \sigma_x \cdot dA = 0$$

Uma vez que a tensão normal é dada por $\sigma_x = -\frac{M \cdot y}{I_{EN}}$ ou $\sigma_x = -\frac{\sigma_{\max}}{c} \cdot y$.

Substituindo esta expressão na Eq. (I):

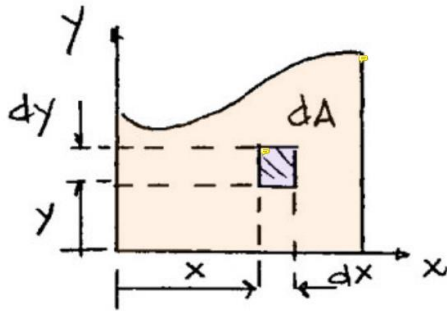
$$\int_A z \cdot \left(-\frac{\sigma_{\max}}{c} \cdot y\right) \cdot dA \quad \Rightarrow \quad -\frac{\sigma_{\max}}{c} \cdot \int_A z \cdot y \cdot dA = 0$$

Onde a integral $\int_A z \cdot y \cdot dA$ representa o produto de inércia da área A com relação aos eixos z e y, e será zero se estes eixos forem principais de inércia.

Podemos resolver esta integral de área com:

- Elementos diferenciais em duas direções, envolvendo duas integrais, ou
- Com uma integração simples, com elemento diferencial retangular.

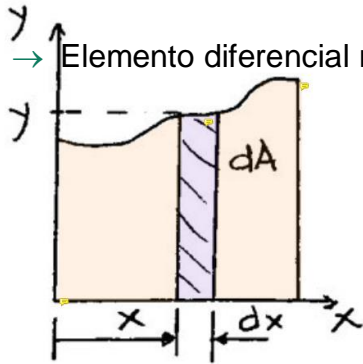
→ Duas integrais:



$$dA = dx dy$$

$$I_{xy} = \int_y \int_x (xy) dx dy$$

→ Elemento diferencial retangular:

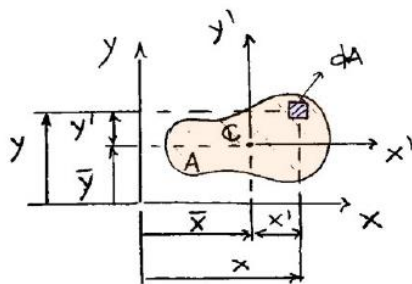


$$dA = y \cdot dx$$

$$I_{xy} = \int_x (xy) \cdot (y dx)$$

É muito comum encontrarmos propriedades geométricas (área, momento de inércia, momento polar de inércia, produto de inércia) de formas comuns de áreas sempre em relação ao centroide.

Podemos determinar o produto de inércia em relação a qualquer eixo paralelo utilizando o Teorema dos eixos paralelos.



Vamos descrever a posição de dA em termos de $(\bar{x} + x')$ e $(\bar{y} + y')$. Logo,

$$I_{xy} = \int_A x \cdot y \, dA \Rightarrow I_{xy} = \int_A (\bar{x} + x') (\bar{y} + y') \, dA$$

$$I_{xy} = \int_A (\bar{x} \cdot \bar{y}) \, dA + \int_A \bar{x} \cdot y' \, dA + \int_A \bar{y} \cdot x' \, dA + \int_A x' \cdot y' \, dA$$

A primeira integral é simplesmente $(\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot A)$. A segunda e terceira integral são nulas pois o momento estático em torno do centróide é igual a zero $\int y' \, dA = \bar{y}' \cdot A$, onde $\bar{y}' = 0$.

Observação: Qual é o valor do centroide em torno de um eixo que passa pelo centroide? Zero!

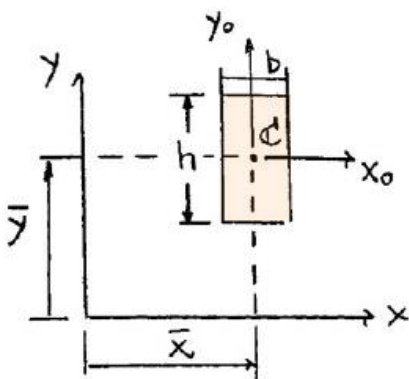
A última integral é o produto de inércia em relação ao centroide

$$C \Rightarrow I_{x'y'} = \int_A x'y' dA.$$

Logo, de acordo com o Teorema dos Eixos Paralelos:

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + (A \cdot \bar{x} \cdot \bar{y})$$

O produto de inércia de um triângulo com centroide C, em relação a um sistema de coordenadas qualquer (x,y) é:



$$I_{x_0 y_0} = 0 \quad (\text{pois há simetria}).$$

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + (A \cdot \bar{x} \cdot \bar{y})$$

Produto de inércia com relação aos eixos que passam por C: x_0, y_0

$$\therefore I_{xy} = (\bar{x} \cdot \bar{y}) \cdot (b \cdot h)$$

Note que é importante manter os sinais de \bar{x} e \bar{y} , pois I_{xy} pode ser negativo ou positivo.

Exemplo 7.8

[Beer 9ª ed.]
[Sample 9.6]

Determine o (a) produto de inércia do triângulo com relação aos eixos x e y, e (b) com relação aos eixos paralelos que passam pelo centroide C(\bar{x}, \bar{y}):

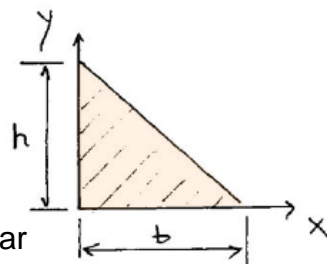
$$I_{xy} = \int_A (x \cdot y) dA$$

Precisamos achar a expressão dessa reta:

$$\begin{cases} x=0 \rightarrow y=h \\ x=b \rightarrow y=0 \end{cases} \rightarrow y = ax + c \rightarrow h = a \cdot 0 + c \therefore c = h$$

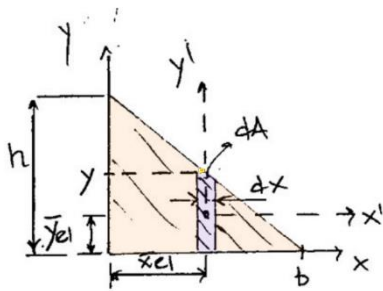
$$0 = a \cdot b + h \rightarrow a = -h/b$$

$$y = -\frac{h}{b} \cdot x + h \text{ ou } x = \frac{b}{h} \cdot (h - y)$$



Escolhendo um elemento diferencial retan-gular vertical:

$$dA = y \cdot dx$$



O produto de inércia da área diferencial em relação à base é:

$$dI_{xy} = dI_{x'y'} + \bar{x}_{el} \cdot \bar{y}_{el} \cdot dA$$

(Teorema dos eixos paralelos).

Como dA é simétrico em relação ao centroide $dI_{x'y'} = 0$.

$$\bar{x}_{el} = x \quad \bar{y}_{el} = y/2$$

$$I_{xy} = \int dI_{xy} \Rightarrow I_{xy} = \int_0^b x \cdot \left(\frac{y}{2}\right) \cdot (y \cdot dx)$$

$$I_{xy} = \int_0^b \frac{x}{2} \cdot \left[h \cdot \left(1 - \frac{x}{b}\right)\right]^2 dx = \frac{h^2}{2} \int_0^b \left(x - \frac{2x^2}{b} + \frac{x^3}{b^2}\right) dx = \frac{h^2}{2} \left[\frac{b^2}{2} - \frac{2b^2}{3} + \frac{b^2}{4}\right]$$

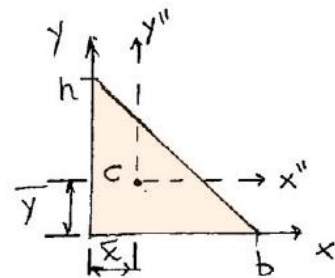
$$I_{xy} = \frac{h^2 b^2}{24}$$

Calculando o produto de inércia em relação ao centroide C do triângulo:

$$I_{xy} = \bar{I}_{x''y''} + \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot A$$

$$\frac{h^2 b^2}{24} = \bar{I}_{x''y''} + \frac{b}{3} \cdot \frac{h}{3} \cdot \left(\frac{b \cdot h}{2}\right) \therefore \bar{I}_{x''y''} = b^2 h^2 \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{18}\right)$$

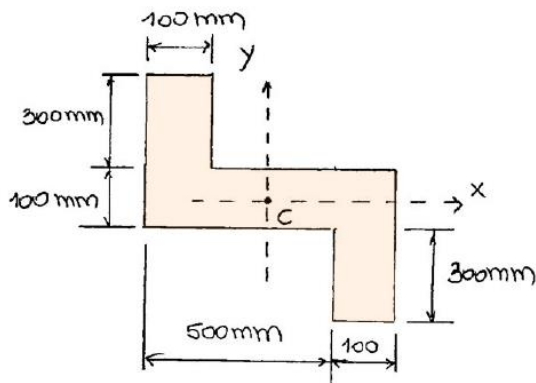
$$\bar{I}_{x''y''} = \frac{-b^2 h^2}{72}$$



Exemplo 7.9

[Hibbeler 13ª ed.]
[Exemplo 10.7]

Determine o produto de inércia da área de seção transversal em relação aos eixos x e y , que passam pelo centroide.



$$I_{xy,1} = \bar{I}_{xy,1} + \bar{x}_1 \bar{y}_1 A_1$$

Como as 3 áreas são retângulos paralelos aos eixos coordenados, o produto de inércia com relação aos eixos que passam por C é nulo. Logo,

$$I_{xy,1} = \bar{x}_1 \bar{y}_1 A_1 \Rightarrow I_{xy,1} = (-250) \cdot (200) \cdot (300) \cdot (100)$$

$$I_{xy,1} = -1,5 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$$

$$I_{xy,2} = \bar{I}_{xy,2} + \bar{x}_2 \bar{y}_2 A_2 = 0 + 0$$

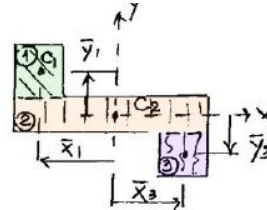
$$I_{xy,2} = 0$$

$$I_{xy,3} = \bar{I}_{xy,3} + \bar{x}_3 \bar{y}_3 A_3$$

$$I_{xy,3} = 0 + (250) \cdot (-200) \cdot (300 \cdot 100)$$

$$I_{xy,3} = -1,5 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$$

Podemos dividir esta seção transversal em 3 retângulos:



Onde o produto de inércia total será a soma:

$$I_{xy} = I_{xy,1} + I_{xy,2} + I_{xy,3}$$

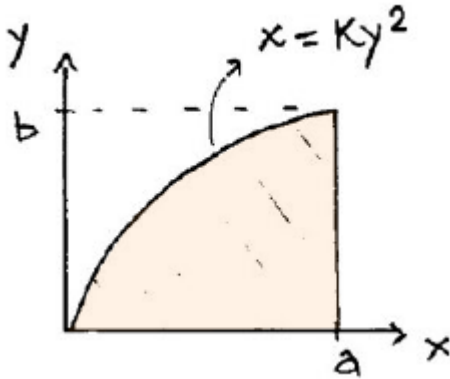
$$I_{xy} = -3 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$$

O sinal negativo indica que os retângulos 1 e 3 possuem umas das coordenadas com sentido negativo.

Exemplo 7.10

[Meriam 7ª ed.]
[Sample A/10]

Determine o produto de inércia em relação aos eixos x e y.



Quando $x = a, y = b$;

$$k = \frac{a}{b^2}, \text{ Logo, } \boxed{x = \frac{a}{b^2} \cdot y^2}$$

Podemos resolver este problema de 3 maneiras: considerando um elemento diferencial quadrado $dA = dx dy$ e resolvendo duas integrais; ou considerando um elemento diferencial de área retangular: $dA = x dy$ ou $dA = y dx$ que envolve apenas uma integral.

- dA Vertical

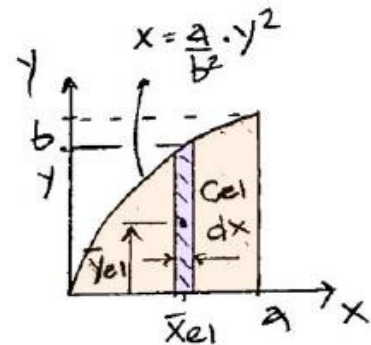
$$dA = y \cdot dx$$

O produto de inércia de dA é dado por:

$$dI_{xy} = \overline{dI_{xy}} + \bar{x}_{el} \cdot \bar{y}_{el} \cdot dA$$

$$dI_{xy} = 0 + x \cdot \left(\frac{y}{2}\right) \cdot (y \cdot dx)$$

$$\boxed{dI_{xy} = \frac{xy^2}{2} \cdot dx}$$



Integrando o produto de inércia dI_{xy} ao longo do eixo x, temos:

$$I_{xy} = \int dI_{xy} = \int_0^a \frac{xy^2}{2} \cdot dx = \int_0^a \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{b^2}{a} \cdot x\right) \cdot dx$$

$$I_{xy} = \frac{b^2}{2a} \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a \therefore I_{xy} = \frac{b^2 a^2}{6}$$

- dA Horizontal

$$dA = y \cdot dx$$

O produto de inércia de dA com relação a x e y é:

$$dI_{xy} = \bar{dI}_{xy} + \bar{x}_{el} \cdot \bar{y}_{el} \cdot dA$$

$$dI_{xy} = 0 + \left[x + \left(\frac{a-x}{2} \right) \right] \cdot y \cdot [(a-x) \cdot dy]$$

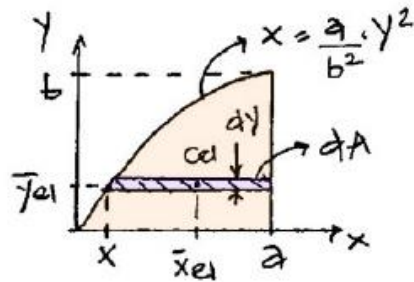
$$dI_{xy} = \frac{(a+x)}{2} (a-x) \cdot y \cdot dy$$

$$dI_{xy} = \frac{1}{2} (a^2 - x^2) \cdot y \cdot dy$$

$$I_{xy} = \int_0^b \frac{1}{2} (a^2 - x^2) \cdot y \cdot dy = \frac{1}{2} \left[\int_0^b a^2 \cdot y \cdot dy - \int_0^b \left(\frac{a}{b^2} \cdot y^2 \right)^2 \cdot y \cdot dy \right]$$

$$I_{xy} = \frac{1}{2} \left[a^2 \cdot \left(\frac{b^2}{2} \right) - \left(\frac{a^2}{b^4} \right) \cdot \left(\frac{b^6}{6} \right) \right] = \frac{a^2 b^2}{4} - \frac{a^2 b^2}{12}$$

$$I_{xy} = \frac{a^2 b^2}{6}$$

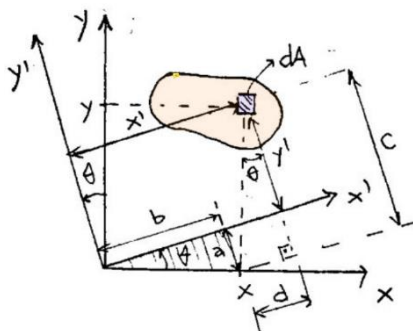


7.6 Rotação de Eixos

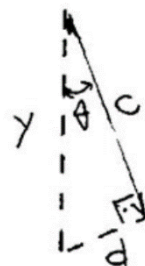
[Hibbeler 13ª ed. Pg. 538]
 [Meriam 7ª ed. Pg. 465]
 [Beer 9ª ed. Pg. 498]

Muitas vezes é importante calcular o momento e o produto de inércia de uma área com relação a eixos inclinados (x', y'), a um ângulo θ , quando I_x, I_y e I_{xy} são conhecidos.

Para encontrar I_x, I_y e I_{xy} , devemos determinar um conjunto de equações de transformação.



$$\begin{aligned} a &= \sin \theta \cdot x \\ b &= \cos \theta \cdot x \end{aligned}$$



$$\cos \theta = \frac{c}{y}$$

$$\begin{aligned} c &= \cos \theta \cdot y \\ d &= \sin \theta \cdot y \end{aligned}$$

Podemos observar a seguinte relação entre as coordenadas (x',y') e (x,y) :

$$x' = b + d$$

$$x' = x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta$$

$$y' = c - a$$

$$y' = y \cdot \cos \theta - x \cdot \sin \theta$$

Desta forma, o momento de inércia de área em relação aos eixos x' e y' , e o produto de inércia $I_{x'y'}$ é:

$$I_{x'} = \int_A y'^2 dA = \int_A [y \cdot \cos \theta - x \cdot \sin \theta]^2 dA$$

$$I_{y'} = \int_A x'^2 dA = \int_A [x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta]^2 dA$$

$$I_{x'y'} = \int_A x'y' dA = \int_A (x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta)(y \cdot \cos \theta - x \cdot \sin \theta) dA$$

Expandindo $I_{x'}$, temos:

$$I_{x'} = \int_A y^2 \cos^2 \theta dA - 2 \int_A xy \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta dA + \int_A x^2 \sin^2 \theta dA$$

$$I_{x'} = I_x \cdot \cos^2 \theta - 2 \cdot I_{xy} \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta + I_y \cdot \sin^2 \theta$$

Utilizando as seguintes relações trigonométricas:

$$\sin(2\theta) = 2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \quad \text{e} \quad \cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$$

Temos:

$$\cos(2\theta) = (1 - \sin^2(\theta)) - \sin^2(\theta)$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) + (\cos^2(\theta) - 1)$$

$$\Rightarrow \sin^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$$

$$\Rightarrow \cos^2(\theta) = \frac{\cos(2\theta) + 1}{2}$$

Aplicando as relações trigonométricas acima nos momentos de inércia rotacionamos $I_{x'}$ e $I_{y'}$ e no produto de inércia rotacionado $I_{x'y'}$, temos:

$$I_{x'} = I_x \cdot \left[\frac{\cos(2\theta) + 1}{2} \right] - I_{xy} \cdot \sin(2\theta) + I_y \cdot \left[\frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \right]$$

$$I_{x'} = \left(\frac{I_x + I_y}{2} \right) + \left(\frac{I_x - I_y}{2} \right) \cdot \cos(2\theta) - I_{xy} \cdot \sin(2\theta)$$

Fazendo o mesmo procedimento para $I_{y'}$, temos:

$$I_{y'} = \left(\frac{I_x + I_y}{2} \right) - \left(\frac{I_x - I_y}{2} \right) \cdot \cos(2\theta) + I_{xy} \cdot \sin(2\theta)$$

Notem que $I_{x'} + I_{y'} = I_x + I_y$

O produto de inércia $I_{x'y'}$, é dado por:

$$I_{x'y'} = \int_A xy \cdot \cos^2\theta \, dA + \int_A y^2 \cdot \sin\theta \cos\theta \, dA - \int_A x^2 \cdot \cos\theta \sin\theta \, dA - \int_A xy \cdot \sin^2\theta \, dA$$

$$I_{x'y'} = I_{xy} \cdot \cos^2\theta + I_x \cdot \sin\theta \cos\theta - I_y \cdot \cos\theta \sin\theta - I_{xy} \cdot \sin^2\theta$$

Utilizando as relações trigonométricas acima, temos:

$$I_{x'y'} = I_{xy} \cdot \left[\frac{\cos(2\theta) + 1}{2} \right] + I_x \cdot \left[\frac{\sin(2\theta)}{2} \right] - I_y \cdot \left[\frac{\sin(2\theta)}{2} \right] - I_{xy} \cdot \left[\frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \right]$$

$$I_{x'y'} = I_{xy} \cdot \cos(2\theta) + \left(\frac{I_x - I_y}{2} \right) \cdot \sin(2\theta)$$

As equações de transformação de $I_{x'}$ e $I_{x'y'}$ são equações paramétricas de um círculo. Se plotarmos um ponto P com coordenadas $(I_{x'}, I_{x'y'})$ para qualquer ângulo de rotação θ , todos os pontos estarão em um círculo.

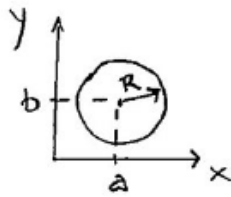
Para estabelecer esta relação vamos eliminar o parâmetro θ das equações $I_{x'}$ e $I_{x'y'}$:

$$\begin{cases} I_{x'} = \left(\frac{I_x + I_y}{2} \right) + \left(\frac{I_x - I_y}{2} \right) \cdot \cos(2\theta) - I_{xy} \cdot \sin(2\theta) \\ I_{x'y'} = I_{xy} \cdot \cos(2\theta) + \left(\frac{I_x - I_y}{2} \right) \cdot \sin(2\theta) \end{cases}$$

Elevando as duas equações ao quadrado e somando-as:

$$\left[I_{x'} - \left(\frac{I_x + I_y}{2} \right) \right]^2 + I_{x'y'}^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 + I_{xy}^2$$

Como a equação que descreve uma circunferência é dada por:

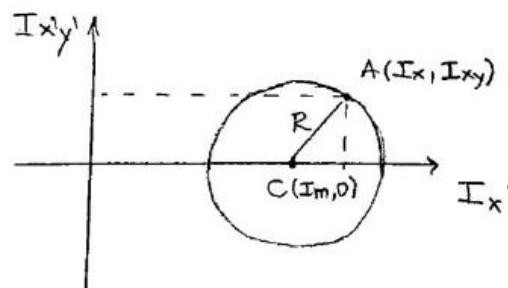


$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2,$$

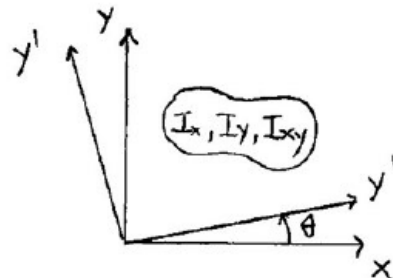
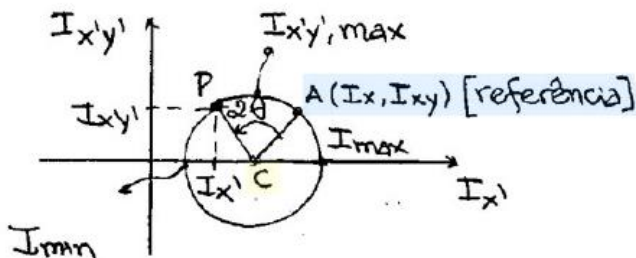
podemos observar que $(I_{x'} - I_m)^2 + I_{x'y'}^2 = R^2$

onde $I_m = \left(\frac{I_x + I_y}{2}\right)$ e $R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$.

Desta forma, podemos determinar os momentos de inércia com outras orientações, construindo um círculo com centro $C(a, b) \Rightarrow C(I_m, 0)$ e plotando um ponto de referência A com coordenadas $A(I_x, I_{xy})$.



Como encontrar os momentos de inércia em um novo eixo de coordenadas utilizando o círculo de Mohr ?



O centro do círculo é dado por $C(I_m, 0)$ ou $C\left(\frac{I_x + I_y}{2}, 0\right)$.

O ponto de referência A é o dado de I_x e I_{xy} do problema original $A(I_x, I_{xy})$.

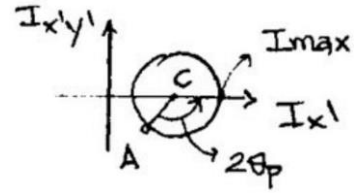
Se quisermos conhecer $I_{x'}$ e $I_{x'y'}$, dado uma rotação θ , devemos calcular (por trigonometria) as componentes $I_{x'}$ e $I_{x'y'}$, a partir de um ângulo 2θ (pois no desenvolvimento da eq. do círculo o ângulo é 2θ) partindo da linha de referência CA, no sentido anti-horário.

O momento de inércia máximo, $I_{x,max}$ é dado pela soma de $I_m = \left(\frac{I_x + I_y}{2}\right)$ com o raio R: Logo,

$$\begin{aligned} I_{x,max} &= I_m + R \\ I_{x,min} &= I_m - R \end{aligned}$$

Enquanto que o máximo produto de inércia é $I_{xy,max} = R$.

Notem que x' e y' estão defasados em 90° . Logo, no círculo de Mohr podemos encontrar $I_{y'}$ de um ponto, encontrando as coordenadas à 180° a partir de P, no sentido anti-horário.

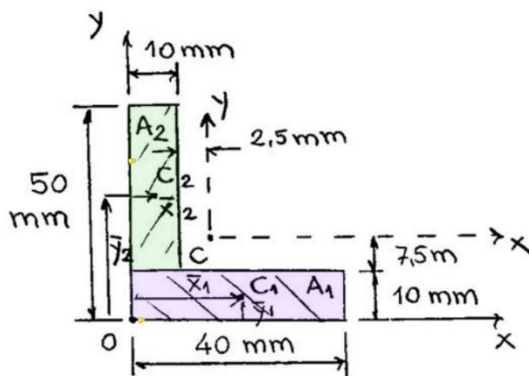


" Os eixos nos quais o momento de inércia é máximo e mínimo são definidos como Eixos Principais de Inércia"

Exemplo 7.11

[Meriam 7ª ed.]
[Sample A/12]

Determine a orientação dos eixos principais de inércias em relação ao centroide C do perfil L, os momentos de inércia mínimo e máximo e $I_{x'y'}$, à 50° no sentido anti-horário.



→ Cálculo do Centroide $C(\bar{x}, \bar{y})$

Esta figura não apresenta simetria, mas pode ser decomposta em 2 retângulos para cálculo de C.

$$\int x \, dA = \bar{x} \cdot \int dA$$

$$\int y \, dA = \bar{y} \cdot \int dA$$

Para y:

$$\bar{y} = \frac{\bar{y}_1 A_1 + \bar{y}_2 A_2}{A_1 + A_2} \Rightarrow \bar{y} = \frac{5 \cdot (40 \cdot 10) + 30 \cdot (40 \cdot 10)}{2 \cdot (40 \cdot 10)}$$

$$\Rightarrow \bar{y} = \frac{5 \cdot (40 \cdot 10) + 30 \cdot (40 \cdot 10)}{2 \cdot (40 \cdot 10)}$$

$$\bar{y} = 17,5 \text{ m}$$

Para x:

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 A_1 + \bar{x}_2 A_2}{A_1 + A_2} \Rightarrow \bar{x} = \frac{20 \cdot (40 \cdot 10) + 5 \cdot (40 \cdot 10)}{2 \cdot (40 \cdot 10)}$$

$$\bar{x} = 12,5 \text{ m}$$

$$I_x = I_{x,1} + I_{x,2} = 18,1667 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

Produto de Inércia I_{xy} :

$$I_{xy} = I_{xy,1} + I_{xy,2} = -7,5 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$I_{xy,1} = \bar{I}_{xy,1} + d_{1x} \cdot d_{1y} \cdot A_1$$

$$I_{xy,2} = \bar{I}_{xy,2} + d_{2x} \cdot d_{2y} \cdot A_2$$

$$I_{xy,1} = 0 + (7,5) \cdot (-12,5) \cdot (40 \cdot 10)$$

$$I_{xy,2} = 0 + (-7,5) \cdot (12,5) \cdot (40 \cdot 10)$$

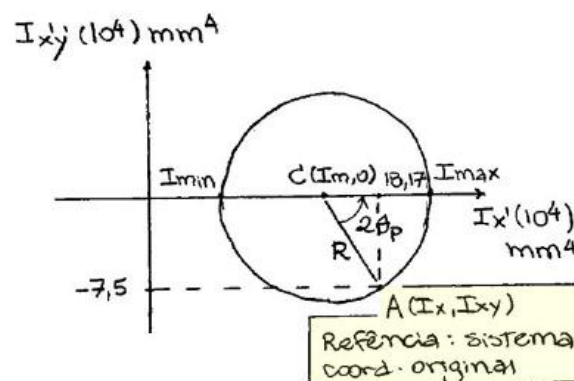
$$I_{xy,1} = -3,75 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$I_{xy,2} = -3,75 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

Círculo de Mohr \therefore Centro $C(I_m, 0)$ onde $I_m = \frac{I_x + I_y}{2}$

$$\Rightarrow I_m = \frac{18,1667 \cdot 10^4 + 10,1667 \cdot 10^4}{2}$$

$$I_m = 14,1667 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$



→ Momento de Inércia Máximo:

$$I_{\max} = I_m + R$$

$$I_{\max} = 14,167 \cdot 10^4 - 8,5 \cdot 10^4$$

$$I_{\max} = 22,667 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

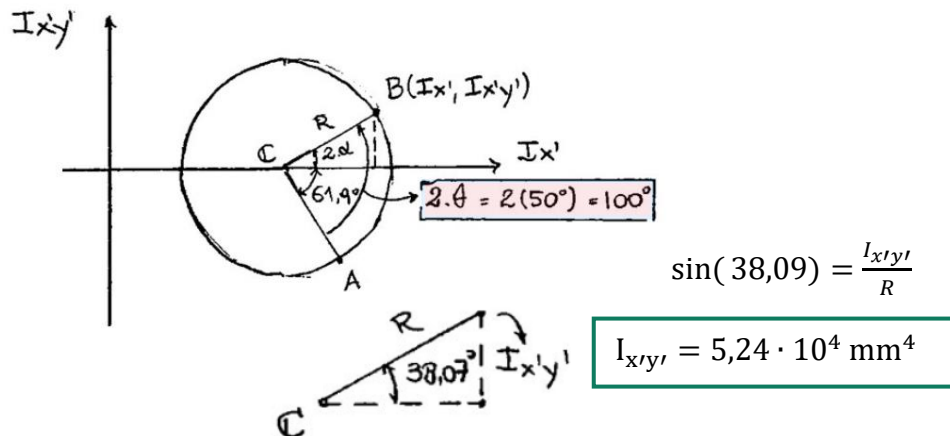
→ Momento de Inércia Mínimo

$$I_{\min} = I_m - R$$

$$I_{\min} = 14,167 \cdot 10^4 - 8,5 \cdot 10^4$$

$$I_{\min} = 5,667 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

→ $I_{x'y'}$ a 50° no sentido A.H.:



→ Ponto de Referência $A(I_x, I_{xy})$: $A(18,1667 \cdot 10^4, -7,5 \cdot 10^4)$

→ Cálculo do Raio R:

Por trigonometria: $R^2 = (I_x - I_m)^2 + I_{xy}^2$

$$R = \sqrt{(18,167 - 14,167)^2 + (-7,5)^2} \Rightarrow R = 8,5 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

→ Orientação dos eixos principais:

θ_p : ângulo no sentido anti-horário para que o perfil (calculado no sistema de eixos coordenados xy) apresente os momentos de inércia principais (I_{\min}, I_{\max}).

$$2\theta_p = \text{tg}^{-1} \left[\frac{7,5 \cdot 10^4}{(18,167 - 14,167) \cdot 10^4} \right] \therefore 2\theta_p = 61,9275$$

$$\theta_p = 30,96^\circ$$

